Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz

(Teildruck)

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Lucie Scholtz
aus Liegnitz

Marburg 1934

Gedruckt in der Verlagsanstalt Hans Kretschmer, Görlitz-Biesnitz

Als Dissertation angenommen am 29. Juli 1932
Berichterstatter: Professor Dr. Mahnke
Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 1933

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Die vollständige Abhandlung erscheint voraussichtlich in den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik“ bei Julius Springer, Berlin

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554410_0115

Literaturverzeichnis

Archimedis opera omnia iterum edidit J. L. Heiberg. Lipsiæ 1910/13/15.

Archimedes Werke von Sir Thomas L. Heath. Deutsch von Dr. Fritz Kliem. Berlin 1914.

Isaac Barrow. Lectiones opticæ et geometricæ. Londini 1674 (zuerst 1669/70).

Charles Bossut. Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik. Aus dem Französischen übersetzt von N. Th. Reimer. Hamburg 1804.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Band, 1. Aufl. Leipzig 1880.

2. Band. Neudruck der 2. Aufl. Leipzig 1913.

3. Band. 2. Auflage Leipzig 1901.

Ernst Cassirer. Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg 1902.

Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fasc. II (Mars 1672—Novembre 1676) Poitiers 1914—24. (Abgekürzt Cat. crit.)

Bonaventura Cavalerius. Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bononiæ 1635.

J. M. Child. The early mathematical manuscripts of Leibniz. Chicago, London, 1920. (Abgekürzt Child.)

Hermann Cohen. Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin 1883.

Louis Couturat. La logique de Leibniz. Paris 1901.

Louis Couturat. Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Paris 1903.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien. Leipzig 1899—1916.

Carl Immanuel Gerhardt. Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz. Halle 1848.

Carl Immanuel Gerhardt. Die Geschichte der höheren Analysis I. Abt. (einzig). Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855.

Carl Immanuel Gerhardt. Zum 200jährigen Jubiläum der Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz. Monatsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. Berlin 1875. S. 588—600.

Carl Immanuel Gerhardt. Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877.

Carl Immanuel Gerhardt. Leibniz in London. Sitzungsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. Berlin 1891. S. 157—176.

Carl Immanuel Gerhardt. Leibniz und Pascal. Sitzungsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. Berlin 1891. S. 1053—1068.

Jos. E. Hofmann u. H. Wieleitner. Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Sitzungsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. Phys. math. Kl. 1931. XXVI. S. 562—590. Berlin 1931.

Ivan Jagodinsky. Leibnitiana. Elementa philosophia arcanae de summa rerum. Kasan 1913.

Abraham Gotthelf Kästner. Lobschrift auf Gottfried Wilhelm Freiherrn von Leibniz. In der königl. deutschen Gesellschaft zu Göttingen den 10. Juni 1769 vorgelesen. Altenburg.

Leibnitii opera omnia nunc primum collecta etc. studio Ludovico Dutens. Tomus tertius, continens opera mathematica. Genevæ 1768. (Abgekürzt: Dutens.)

G. W. Leibniz. Historia et origo calculi differentialis. Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Hannover 1846.

G. G. Leibnitii opera philosophica omnia ed. J. E. Erdmann. Berlin 1840.
Leibnizens mathematische Schriften. Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlin 1849/50. Halle 1855—63. (Abgekürzt: Math. Schr.)
Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlin 1875—90. (Abgekürzt: Phil. Schr.)
Gottfried Wilhelm Leibniz. Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern. Band 1 (einzig). Berlin 1899.
G. W. Leibniz. Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. Übers. v. A. Buchenau. Hsgg. von E. Cassirer. Philosophische Bibliothek. Band 107 und 108. Leipzig 1904/06. (Abgekürzt: Hauptschriften.)
Leibniz. Über die Analysis des Unendlichen. Herausgegeben von Gerhard Kowalewski. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 162. Leipzig 1908.
Gino Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig 1910.
Dietrich Mahnke. Die Indexbezeichnung bei Leibniz als Beispiel seiner kombinatorischen Charakteristik. Bibliotheca Mathematica. Herausgegeben von Gustaf Eneström. 3. Folge. 13. Band. Leipzig 1913. S. 250 ff.
Dietrich Mahnke. Leibniz und Goethe. Erfurt 1924.
Dietrich Mahnke. Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmethaphysik. I. Halle 1925.
Dietrich Mahnke. Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. Abhandlungen der Preuß. Ak. d. Wiss. Jahrgang 1925. Phys. math. Kl. Nr. 1. Berlin 1926.
Dietrich Mahnke. Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik. Isis, no. 30 (vol. IX, 2). Brüssel 1927. S. 279—293.
Dietrich Mahnke. Zusätze aus den ungedruckten Handschriften (zu dem oben genannten Aufsatz von Jos. E. Hofmann u. H. Wieleitner). Sitzungsber. d. Preuß. Ak. d. Wiss. Phys. math. Kl. 1931. XXVI. S. 590—600. Berlin 1931.
Isaac Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica. Londini 1687.
Isaac Newton. Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit Joh. Castillioneus. Lausannae et Genevae 1744.
R. Reiff. Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.
Ernst Tischer. Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Jahresbericht des Nicolaigymnasiums in Leipzig 1896.
Ernst Tischer. Leibniz und die Gymnasialmathematik. In: Xenia Nicolaitana. S. 197. Leipzig 1912.
Moritz Tramer. Die Entdeckung und Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz. Dissertation. Bern 1906.
Kurt Ufermann. Untersuchungen über das Gesetz der Kontinuität bei Leibniz. Dissertation Münster 1927.
Georg Wanke. Das Stetigkeitsgesetz bei Leibniz. Erlanger Dissertation. Kiel 1892.
Hermann Weißenborn. Die Principien der höhern Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange. Halle 1856.
Heinrich Wieleitner. Geschichte der Mathematik. II. Teil. Berlin und Leipzig 1911/21. (Der I. Teil ist verfaßt von Siegmund Günther, Leipzig 1908.)
Heinrich Wieleitner. Mathematische Quellenbücher IV. Infinitesimalrechnung. Berlin 1929.
Hieronymus Georg Zeuthen. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Kopenhagen 1896.
Hieronymus Georg Zeuthen. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe. Leipzig 1903.

Einleitung

§ 1.

Es unterliegt heute keinem Zweifel mehr, daß Leibniz die Infinitesimalrechnung zwar später als Newton, aber doch selbständig und auf einem ganz anderen Wege entdeckt hat, und daß er durch die Erfindung der noch heute üblichen Differential- und Integralsymbole und durch die frühere Veröffentlichung seines Algorithmus mehr als Newton für den schnellen Weiterausbau der neuen, höheren Analysis geleistet hat.

Dagegen sind die Vorwürfe immer noch nicht verstummt, daß Leibniz sich ebenso wenig wie Newton oder sogar noch weniger um eine exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bemüht habe. Im 18. Jahrhundert wurde von seinen Gegnern nach Bossut[1]) wiederholt behauptet, daß „die Metaphysik seiner Methode dunkel oder gar fehlerhaft sei, daß es keine unendlich kleine Größen gebe, und daß über die Genauigkeit einer Methode, wo diese Größen eingeführt seien, Zweifel übrig blieben". Aber auch ein Verehrer Leibnizens wie Abr. Gotth. Kästner meinte in seiner „Lobschrift"[2]): „Scharfe Beweise von den Gründen dieser Rechnung hat Leibniz so wenig gegeben als Newton. Die wahren Gründe beruhen ohnstreitig auf der Abkürzung der Schlüsse der Alten dadurch, daß man die Verhältnisse verschwindender Größen betrachtet. Newton, der hievon etwas erwähnt hat, hat doch, seiner Gewohnheit nach, die Quellen der Erfindungen zu verbergen, keinen Gebrauch für seine Rechnung davon gemacht. In Leibnizens Vortrage empfindet der Geometer die Richtigkeit der Gründe, auch wenn er sich nicht die Geduld nehmen will, die Schlüsse einzeln auseinander zu setzen, wie man die guten Verhältnisse eines Palastes empfindet, ohne wirkliche Abmessungen anzustellen. Überhaupt ist bekannt, daß Leibniz seine Lehre mit vollständigen Beweisen zu versehen und ausführliche Anwendungen davon zu machen, andern überlassen hat, ohne Zweifel, weil er sein Vergnügen in beständigem Abwechseln mit allerlei Untersuchungen fand. Er entdeckte neue Länder, aber es mangelte ihm an Geduld und Zeit zu derselben Erkundigung und Anbau."

Selbst Carl Immanuel Gerhardt, der unermüdliche Herausgeber der Handschriften Leibnizens und Verteidiger seiner Verdienste um die Entdeckung der höheren Analysis, behauptete in einer Schrift aus dem Jahre 1855[3]): „Leibniz und seine Mitarbeiter verabsäumten dem neuen Gebäude ein sicheres Fundament zu verschaffen." Dagegen: „Newtons Auffassung des Prinzips der höheren Analysis ruhte auf einem vollkommen sicheren Fundament, auf dem Begriffe der ersten und letzten Verhältnisse, d. i. auf

[1]) Versuch einer allg. Gesch. d. Math. S. 222.

[2]) Lobschrift auf Gottfried Wilhelm Freiherrn von Leibniz. S. 20/21.

[3]) Gesch. d. höheren Analysis, Einl. S. V. und S. 93/94.

dem Begriffe der Grenze. Diese feste Begründung hatte die Theorie der Fluxionen vor der Differentialrechnung voraus."

Es ist unverständlich, daß sogar Gerhardt diesen Vorwurf gegen Leibniz hat erheben können. Denn er hatte selbst mehrere Jahre vorher (1846) im Anhange seiner Ausgabe von Leibnizens „Historia et origo calculi differentialis" zwei weitere Handschriften veröffentlicht, von denen er in der Einleitung sagte: „In der ersteren spricht sich Leibniz deutlicher über das Prinzip seiner neuen Rechnung aus, als es in der von ihm später zum Druck beförderten geschah. . . . . Die zweite dieser Abhandlungen dürfte insofern auf Beachtung Anspruch machen, als Leibniz darin einen Versuch gemacht hat, von den Rechnungsregeln der Differentialrechnung Beweise zu geben." Später hat Gerhardt denn auch in seiner „Geschichte der Mathematik in Deutschland" (Seite 170—174) diese und verschiedene andere Bemühungen Leibnizens, „Angriffe auf die Sicherheit des Fundaments der Differentialrechnung" abzuwehren, im Zusammenhange dargestellt, ohne freilich dabei tiefer in Leibnizens mathematische und philosophische Gedankengänge einzudringen.

Aber diese Veröffentlichungen Gerhardts blieben fast völlig unbeachtet. Und da sogar er selbst an der anderen genannten Stelle sich in entgegengesetztem Sinne geäußert hatte, so ist kein Wunder, daß der Vorwurf unzureichender Begründung immer wieder erhoben wurde. Bei Weißenborn findet sich eine besonders scharfe Formulierung: „Man sieht aus dem Bisherigen, daß Leibniz allerdings nicht imstande war, die von ihm aufgestellten Regeln hinreichend zu beweisen, und wir sehen ferner, daß er seine Differentialrechnung gebrauchte, weniger weil er von der Sicherheit und Gewißheit der Methode überzeugt war, als weil er bemerkte, daß dieselbe faßlich (freilich nur bis zu einem gewissen Grade) und geeignet sei, um mit ihrer Hilfe Neues zu entdecken"[4]).

Doch auch noch H. G. Zeuthen, dessen mathematik-geschichtliche Forschungen sich sonst durch sorgfältige Quellenstudien und objektive Beurteilung auszeichnen, behauptet von Leibniz und seiner Schule: „Man war mehr darauf bedacht, die neuen Methoden weiter zu entwickeln und zum Auffinden neuer Resultate anzuwenden, als ihre logische Zuverlässigkeit zu sichern. Früher konnten auch die infinitesimalen Untersuchungen auf die bewährte logische Grundlage bauen, die man vom Altertum ererbt und in vielen Beziehungen den neueren Untersuchungen angepaßt hatte und zufolge welcher man, wenn es vonnöten war, zu einem Exhaustionsbeweis seine Zuflucht nahm. An dieses Erbe hielt sich auch Newton in seinen Regeln für genaue Grenzübergänge, die er als Einleitung zu den Principia aufstellt. Da sich die durch Leibniz eingeführten Formen und Betrachtungsweisen dieser Tradition nicht anschlossen, erforderten sie tatsächlich neue logische Stützen.

[4]) Die Principien d. höh. Analysis. S. 101.

Man verließ sich aber auf die Geläufigkeit, mit der man allmählich diese Operationen auszuführen lernte, und auf die offenbare Richtigkeit einer Menge der gewonnenen Resultate und kümmerte sich nicht weiter um die Entwicklung der nötigen Sicherungsmittel. . . . . Von einigen isolierten Bestrebungen abgesehen wurde diese mehr logische Arbeit . . . . erst zu Anfang des 19. Jahrhunderts ernsthaft in Angriff genommen, namentlich von Gauß, Cauchy und Abel"[5]).

Demgegenüber beabsichtige ich, in der folgenden Arbeit zu zeigen, daß diese Charakteristik, die für die Nachfolger Leibnizens freilich richtig ist, für ihn selbst durchaus nicht paßt. Ich will den Beweis dafür erbringen, daß Leibniz sich aller Schwierigkeiten, die mit der Einführung des Differentialbegriffs auftraten, ganz klar bewußt war und daß er sich nicht nur immer wieder darum bemüht hat, sondern daß es ihm auch immer besser gelungen ist, diese Schwierigkeiten zu überwinden und dem Aufbau seines Werkes die erforderlichen unumstößlichen Grundlagen vollkommen zu sichern.

§ 2.

Bei meinen Darlegungen stütze ich mich zunächst auf eine möglichst vollständige Zusammenstellung und Gedankenanalyse aller Stellen in den bisher gedruckten Briefen und Abhandlungen Leibnizens, in denen er sich um die mathematische oder philosophische Grundlegung der Infinitesimalrechnung bemüht hat.

Besonders wichtig sind dabei die Aufsätze, die er in den Jahren 1695 und 1701/02 zur Verteidigung gegen die Angriffe des Niederländers Bernhard Nieuwentijt (1654—1718) verfaßte. Dieser hatte in Amsterdam 1694 und 1695 zwei Schriften veröffentlicht: „Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis" und „Elementa analyseos infinitorum", in denen er den neuen Kalkül wegen seiner mangelhaften Grundlagen angriff und diese durch vermeintlich bessere zu ersetzen versuchte. Leibniz antwortete in der Abhandlung: „Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentiit circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas"[6]). Auf Nieuwentijts wiederholte Einwendungen in der 1696 erschienenen Schrift: „Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et Responsio ad virum nobiliss. G. G. Leibnitium", antwortete Leibniz nicht selbst, sondern nur ein Schüler von ihm, Jakob Hermann (1678—1733), übernahm die Verteidigung des Meisters.

Erst als 1701 im „Journal de Trevoux" ein neuer Angriff von einem

---

[5]) Gesch. d. Math. im 16. u. 17. Jahrh. S. 414/415.

[6]) Acta Eruditorum Lips., Juli 1695; dazu im August des gleichen Jahres „Addenda ad Schediasma"; beide Artikel wieder abgedruckt in den Math. Schr. V, S. 320—328.

Anonymus auf die Differentialrechnung erfolgte[7]), ergriff Leibniz selbst wieder das Wort in zwei Briefen an Pinson und Varignon[7a]). Auszüge aus diesen Briefen wurden damals auch in Zeitschriften abgedruckt[8]). Dagegen blieb ein weiterer Aufsatz: „Justification du Calcul des infinitésimales par celuy de l'Algebre ordinaire", den Leibniz zur genaueren Aufklärung an Pinson schickte, damals ungedruckt und wurde erst 1859 von Gerhardt veröffentlicht[9]).

Tiefer aber als alle bisher erwähnten Äußerungen Leibnizens drang eine etwas spätere[10]), ausführliche Abhandlung (ohne Überschrift), die auch von Gerhardt zuerst veröffentlicht worden ist (siehe oben S. 8, Z. 9). Hier hat Leibniz

---

[7]) Der Aufsatz, der im Anhang zum Mai-Juni-Hefte 1701, Tom. I, S. 422—430, der „Memoires pour l'histoire des sciences et des beaux arts" (gewöhnlich Journal de Trevoux genannt) erschien, berichtete über Jakob Bernoullis Berechnung des Krümmungsradius (nach einer Abhandlung in den Leipziger Acta Eruditorum) und flocht dabei einige kritische Bemerkungen über die Methode der Differentialrechnung ein. In dem Exemplar der Preuß. Staatsbibl. in Berlin, das ich zuerst benutzte, fehlt dieser Anhang. Doch enthält das Berliner Exemplar im Anhang zum Nov.-Dez.-Hefte 1701 unter Berufung auf den früheren Aufsatz eine nochmalige „Analyse de la nouvelle methode de M. Bernoulli Professeur à Bâle pour déterminer aisément les Rayons de la Developpée . . ." Das Exemplar der Göttinger Universitätsbibliothek, das ich später benutzen konnte, enthält auch den ersten, von den Historikern der Mathematik bisher nicht beachteten Aufsatz mit dem Titel: „Nouvelle methode pour déterminer aisément les rayons de la developpée dans toute sorte de courbe algebraïque. Par Monsieur Jaques B. Acta Eruditorum, Mensis Novembris anni 1700. Lipsiae." Der Verfasser dieses kritischen Berichtes war nach einer brieflichen Mitteilung Varignons (an Johann Bernoulli, Math. Schr. IV, S. 97) der Père Gouye.

[7a]) Der Brief an Pinson vom 29. Aug. 1701 ist gedruckt in den Math. Schr. IV, S. 95/96; der an Varignon vom 2. Febr. 1702 Math. Schr. IV, S. 91/95.

[8]) „Memoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul différentiel", Journal de Trevoux, Nov. Dez. 1701, S. 270—272, wieder gedruckt von Dutens III, S. 369—370 und Gerhardt, Math. Schr. V, S. 350. „Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a raporté de luy dans les Mémoires de Trevoux des mois de Novembre et Décembre derniers", Journal des Sçavans, 20. März 1702, S. 297, wieder gedruckt von Dutens III, S. 370—372.

[9]) M. Cantor (Vorl. über Gesch. d. Math. III, S. 277) behauptet, der Aufsatz sei im Mai 1702 im Journal des Sçavans veröffentlicht. Das ist aber nicht der Fall. Nach dem Briefe Varignons an Leibniz vom 23. Mai 1702 (Math. Schr. IV, S. 103/104) hat Leibniz den Aufsatz zwar nach Paris zur Veröffentlichung im Journal des Sçavans geschickt, die Herausgeber aber haben die Veröffentlichung für die nächste Zeit abgelehnt. Pinson hat den Aufsatz dann an Varignon weitergegeben und dieser an den Père Gouye zur Veröffentlichung im Journal de Trevoux. Aber auch in diesem Journal habe ich keinen Abdruck gefunden. In den Verzeichnissen der gedruckten Schriften Leibnizens von Jaucourt und Ludovici und in der Gesamtausgabe von Dutens fehlt der Aufsatz. Er ist also wohl sicher damals noch nicht gedruckt worden, sondern erst 1859 in den Math. Schr. IV, S. 104—106.

[10]) Wahrscheinlich noch im Jahre 1702 entstanden, denn Leibniz erwähnt darin den Angriff im Journal de Trevoux, der im Juni 1701 erfolgt war, mit

sein deutlich ausgesprochenes Ziel, „die Infinitesimalrechnung durch strenge Beweise zu sichern“[11]), am vollständigsten erreicht. Er bedient sich dabei in der heute noch üblichen Weise des exakten mathematischen Grenzbegriffes, den er zu seinem philosophischen Prinzip der Kontinuität in Beziehung setzt. Die Analyse dieser Abhandlung wird den Schlußpunkt meiner Untersuchungen bilden. Wegen ihrer besonderen Wichtigkeit habe ich den Druck bei Gerhardt mit der Handschrift[12]) verglichen und ihn dabei an mehreren Stellen verbessern können.

Wir werden uns aber nicht auf diese verhältnismäßig späten Arbeiten Leibnizens allein stützen dürfen. Denn damals hatte ja auch Newton seine Fluxionsrechnung schon teilweise veröffentlicht. Und es könnte sein, daß Leibniz erst durch die Andeutungen einer exakten Begründung, die Newton z. B. in den Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London 1687, gebracht hatte, zu seinen eigenen Begründungsversuchen angeregt worden ist. Er hat ja selbst zugegeben, daß er Newton zwar nicht bei der ersten Entdeckung, aber wohl bei der späteren Ausarbeitung der höheren Analysis, z. B. auf dem Gebiete der Reihenlehre, manches verdankt. Wir werden deshalb auch auf frühere Arbeiten Leibnizens zurückgehen müssen, so auf seine Erstveröffentlichung der Differentialrechnung in den Acta Eruditorum vom Oktober 1684: „Nova methodus pro maximis et minimis, itemqve tangentibus“[13]) und eine etwa gleichzeitige, damals ungedruckt gebliebene Handschrift mit dem Titel: „Elementa calculi novi pro differentiis et summis . . . .“, die von Gerhardt 1846 zuerst veröffentlicht worden ist[14]). Bereits diese Arbeiten enthalten erste Ansätze zu der exakten Begründung, die 1702 vollständig durchgeführt worden ist.

Wir können aber sogar schon aus Leibnizens Pariser Jahren, ehe er überhaupt Näheres von Newtons Fluxionsrechnung erfahren hatte, ähnliche Bemühungen nachweisen, so daß gar kein Zweifel sein kann, daß er die Infinitesimalrechnung nicht nur selbständig entdeckt, sondern sich auch von

---

„nuper“; ferner erwähnt er ein „Schediasma, das er nach Paris geschickt hatte, um an einem gewöhnlichen Beispiel zu zeigen, daß man auch zwischen Nichtsen ein Verhältnis annimmt“; das kann nur die „Justification“ sein, die wahrscheinlich Anfang 1702 geschrieben ist (vgl. Anm. 9).

[11]) Calculum infinitesimalem muniri demonstrationibus, ... demonstrationibus firmare calculi nostri fundamenta (Historia et origo calculi differentialis, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Hannover 1846, Anhang S. 40, Z. 9, 10, 15, 16; vgl. auch S. 44, Z. 3 und S. 45 Z. 19; Child, S. 146, Z. 7, 8, 13, 14 v. u., S. 150/1, 152, Z. 6 v. u.).

[12]) Leibniz-Handschriften der vormals Kgl. Bibl. in Hannover XXXV (Math.) Vol. VII, 19.

[13]) Math. Schr. V, S. 220—226.

[14]) Vgl. ob. S. 8, Z. 7; Erstdruck in der Ausgabe der Historia et origo, Anhang S. 32—38; wieder abgedruckt in C. I. Gerhardt, Gesch. d. höheren Analysis I, Halle 1855, S. 149—155; englisch bei Child, S. 136—144.

Anfang an selbständig um ihre exakte Grundlegung bemüht hat. Die ersten Anfänge in dieser Hinsicht finden sich bereits in seiner großen Arbeit aus dem Jahre 1676: „De Qvadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae, cuius corollarium est Trigonometria sine Tabulis". Diese umfang- und inhaltreiche Abhandlung, die Leibniz, als er im Oktober 1676 Paris verließ, dort zum Zwecke der Veröffentlichung zurückließ, ist aber bis heute ungedruckt geblieben. Selbst Gerhardt hat sie in seiner Ausgabe von Leibnizens mathematischen Schriften nur erwähnt[15]), aber nicht veröffentlicht, sondern sich mit dem Abdruck einer „Praefatio"[16]) und eines „Compendium Qvadraturae Arithmeticae"[17]) begnügt, das nur einen kurzen Auszug aus der großen Abhandlung darstellt. Gerade die B e w e i s e der Sätze, die für uns das Wichtigste sind, fehlen dort fast gänzlich. Es soll daher unsere erste Aufgabe sein, die handschriftlichen Entwürfe der Abhandlung, die in Hannover noch erhalten sind[18]), zu untersuchen und die für unser Thema wichtigen Stellen daraus zu interpretieren. Sie enthalten, wie wir sehen werden, bereits die Keime aller späteren Gedanken Leibnizens zur Rechtfertigung seiner Infinitesimalrechnung.

[15]) Math. Schr. V, S. 84/85.

[16]) Math. Schr. V, S. 93—98.

[17]) Math. Schr. V, S. 99—113.

[18]) Die wichtigsten Entwürfe, im folgenden mit A und B bezeichnet, sind die Leibniz-Handschriften Abteilung XXXV (Mathematik) Vol. II, 1, Blatt 144—159 und Blatt 7—38. Die für unseren Zweck in Betracht kommenden Teile dieser Handschriften sind hier im Anhang zum ersten Mal veröffentlicht. Über die Datierung dieser Handschriften vgl. Anm. 22.

Der erste, indirekte Beweis der „Qvadratura Arithmetica“ vom Jahre 1676.

§ 3.

Unter der „arithmetischen Quadratur“ einer krummlinig begrenzten Fläche versteht Leibniz die Darstellung ihres Flächeninhalts durch eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen. Er unterscheidet die arithmetischen einerseits von den „genauen geometrischen Quadraturen“ (durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal) und den gleichfalls „genauen analytischen Quadraturen“ (durch algebraische Buchstabenausdrücke), andererseits von den „annähernden Quadraturen“ mechanischer oder rechnerischer Art. Arithmetische Quadraturen stellen die Größen der Flächen mit der gleichen Exaktheit dar wie geometrische oder algebraische Quadraturen, nur nicht durch finite, vollendbare Prozesse, sondern durch unendliche Reihen, die aber, „weil sie auf einem einzigen Fortschrittsgesetze beruhen, vom Geist als ein Ganzes aufgefaßt werden können“, und die schon, wenn man eine hinreichend große endliche Gliederzahl benutzt, den wahren Wert mit einem Fehler, der „kleiner ist als irgendeine beliebige gegebene Größe“, zu berechnen erlauben[19]).

Eine solche arithmetische Quadratur lernte Leibniz, als er sich im Jahre 1673 in die Infinitesimalrechnung seiner Zeit einarbeitete, zuerst nur für die gleichseitige Hyperbel, durch die Arbeiten von Lord Brouncker und Nikolaus Mercator, kennen. Er hatte aber das Glück, schon wenige Monate nachher selbständig die arithmetische Quadratur des Kreises durch die nach ihm benannte Reihe: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots\ldots\ldots$ zu entdecken[20]). Ja, es gelang ihm sogar, eine allgemeine Methode auszubilden, die auf alle Kegelschnitte mit einem Zentrum im Endlichen oder auch ihre Teile anwendbar war, ja die sämtliche bekannten und noch zahllose neue Quadraturen gleichmäßig auszuführen erlaubte.

Der Grundgedanke dieser Methode bestand darin, daß man eine Fläche nicht durch parallele Gerade, wie üblich, in vierlinige, sondern durch konvergente Gerade in dreilinige infinitesimale Elementarstücke zerlegte, diese dann aber in vierlinige verwandelte, die sich zu einer neuen, leichter

[19]) Math. Schr. V, S. 88, 95 f., 119 f.

[20]) Zur Datierung der Entdeckung vgl. Mahnke, Neue Einblicke, S. 12 f. u. S. 59. Im Briefe an Oldenburg vom 28. Dez. 1675 sagt Leibniz, er habe sie schon vor mehr als zwei Jahren den Pariser Geometern mitgeteilt; in dem vom 27. Aug. 1676 sagt er: vor drei Jahren. (Math. Schr. I., S. 87 u. 117.) Inzwischen hatte Leibniz aus dem Briefe Oldenburgs vom 12. April 1675 (Math. Schr. I, S. 61, 62) erfahren, daß Newton und James Gregory diese und ähnliche Reihen schon vor ihm entdeckt hatten.

quadrierbaren Figur zusammenschlossen. Leibniz nannte das „die Methode der Transformation", der infinitesimalen Verwandlung; modern ausgedrückt, handelt es sich um eine Integration durch Einführung neuer Variabeln.

Es ist charakteristisch für Leibniz, daß er sich niemals, wie die meisten früheren Mathematiker, mit der Untersuchung bestimmter Kurven und Flächen begnügte, sondern von Anfang an nach der Ausbildung allgemein anwendbarer Methoden strebte. So forderte er in Handschriften des Jahres 1674[21]) eine „Methode de l'universalité", die „nous enseigne de trouver par une seule opération des formules analytiques et des constructions géometriques générales pour des sujets ou cas differens". Diese Universalmethode beabsichtigte er schon damals auch auf die infinitesimalen Probleme auszudehnen: „La Geometrie des infinis pouvait estre rendue un peu plus susceptible de l'analyse, en sorte que les problèmes des quadratures, des centres de gravité, et des dimensions des lignes ou surfaces courbes se peussent resoudre par le moyen des Equations." Zu diesem Zwecke müßten neue Charaktere zur Bezeichnung der Indivisibeln oder vielmehr unendlich kleinen Größen gebildet werden; dann würde es möglich sein, sämtliche mathematischen Gebiete in einen einzigen, allumfassenden „calcul analytique general" umzuwandeln. Damit ist die Idee der höheren Analysis schon vollkommen klar ausgesprochen, die Leibniz dann, durch die Erfindung der Differential- und Integralsymbole im Oktober 1675, wirklich auszuführen begann.

Aber in den Pariser Jahren kam er auf diesem Gebiete noch nicht so weit, daß er damit schon an die Öffentlichkeit hätte treten können. Daher mußte er, als er im Jahre 1676 daran ging, seine neuen Quadraturen öffentlich bekanntzugeben[22]), statt der für die Zukunft geplanten analytischen

[21]) Z. T. veröffentlicht von Couturat, Opuscules et fragments inédits, p. 97 ff., insbesondere p. 97—99, 105 f., 123—125. Vgl. Mahnke, Neue Einblicke, S. 60. Unterstreichungen von mir.

[22]) Vorher hatte er sie nur einzelnen Freunden mitgeteilt, am ausführlichsten Huygens (vgl. Math. Schr. II, S. 16; die an Huygens gesandte Handschrift ist in Hannover erhalten: XXXV, vol. II. 1, Blatt 81/82). An Oldenburg hatte er in den Jahren 1674 und 75 nur die Tatsache der Entdeckung, aber nicht ihren Inhalt berichtet (Math. Schr. I, S. 53, S. 55 f., S. 59 f., S. 87). Erst am 27. Aug. 1676 teilte er Oldenburg in dem bekannten, zur Weitergabe an Newton bestimmten Briefe die Grundlage seiner Transformationsmethode und ihre Anwendung auf die Quadratur der Kegelschnitte mit (Math. Schr. I. S. 114—119). In diesem Jahre plante er auch die Veröffentlichung im Pariser Journal des Sçavans (in Gestalt eines Briefes an dessen Herausgeber La Roque, Entwurf s. Math. Schr. V. S. 88—92), die aber nicht erfolgte; und endlich arbeitete er jetzt die große selbständige Schrift über die „Quadratura Arithmetica" aus, die schon oben Seite 12 erwähnt ist und uns in diesem Kapitel näher beschäftigen soll. Der erste Entwurf (A) dieser Schrift, der freilich nur 20 von den späteren 51 Lehrsätzen umfaßt, geht vielleicht noch in das Jahr 1675 zurück, aber die hier im Anhang als B bezeichnete letzte Fassung ist sicher erst 1676 ausgearbeitet. Denn da wählt Leibniz z. B. gegen Ende des 50. Lehrsatzes

noch die altgewohnte infinitesimal geometrische Darstellungsweise wählen. Trotzdem zeigen die verschiedenen erhaltenen Entwürfe der großen Abhandlung über die „arithmetische Quadratur" schon immer deutlicher das Aufkeimen und Heranwachsen moderner Ideen. Anfangs plante Leibniz, wie es scheint, nur die Reihe für den Kreis zu veröffentlichen und durch einen apagogischen Beweis nach dem Vorbilde der antiken Exhaustionsmethode zu begründen. Aber schon in dem (im Anhang mit A bezeichneten) Entwurfe, der noch die spezielle Überschrift trägt: „Qvadratura Circuli Arithmetica", gibt er eine allgemeine Darstellung seiner auch für zahllose andere Kurven brauchbaren Transformationsmethode und begründet sie ein für allemal durch einen einzigen Exhaustionsbeweis. In dem späteren (im Anhange mit B bezeichneten) Entwurfe aber, der schon im Titel neben dem Kreise auch die Ellipse und Hyperbel mit nennt, wird in Wirklichkeit eine ganz umfassende Darstellung der gesamten damals bekannten Infinitesimalgeometrie gegeben und einheitlich durch einen apagogischen Beweis gestützt. Ja, in den späteren Abschnitten deutet Leibniz sogar schon an, daß es möglich und wünschenswert sei, diesen indirekten durch einen direkten Beweis mit Hilfe von angenommenen (fictitiae) unendlich kleinen Größen zu ersetzen, die, obschon sie nicht real vorhanden zu sein brauchen, doch imstande sind, die wirklichen Figuren mit beliebiger Genauigkeit, d. h. mit einem Fehler, der kleiner ist als jede überhaupt angebbare Größe, zu berechnen. Damit gibt er, wenn auch noch in anschaulich-geometrischer Einkleidung, doch in Wahrheit schon eine einheitliche Grundlegung der höheren Analysis, soweit sie ihm bis dahin bekannt war, durch eine exakte Grenzbetrachtung. Davon wollen wir uns jetzt durch eine genaue Erörterung der „Qvadratura Arithmetica" im einzelnen überzeugen.

§ 4.

Die Abhandlung beginnt mit der Formulierung und dem Beweis einiger von Leibniz neu aufgestellten Lemmata (Lehnsätze, d. h. Sätze aus anderen Gebieten, die hier zu Hilfe gezogen werden), einem Lemma aus der elementaren Geometrie und 4 Hilfssätzen aus der allgemeinen Differenzenlehre. Darauf folgt im Satz 6 und 7 der strenge Beweis der infinitesimalgeometrischen Transformationsmethode und dann erst die besondere Anwendung auf Einzelfälle.

einmal die Zahl 1676 als Beispiel. Der erste Entwurf dieses 50. Lehrsatzes ist auch erhalten und vom 29. Juni 1676 datiert. In einem, allerdings erst später hinzugefügten Scholium zu Satz 29 spricht Leibniz von Newtons Methode der Bildung unendlicher Reihen durch Division und Wurzelausziehen, die er „neulich erhalten" habe. Das bezieht sich auf Newtons Brief vom 13./23. Juni 1676, dessen Abschrift am 26. Juli/5. Aug. von Oldenburg an Leibniz weitergesandt und von diesem am 26. August 1676 erhalten ist. Dieser Teil der Abhandlung ist also sicher erst im Sept. 1676 geschrieben.

In einer späteren Randbemerkung des Entwurfes B hat Leibniz einen „Index des besonders Bemerkenswerten“ hinzugefügt, dessen Übersetzung ich hier einfügen möchte, weil sie eine gute Übersicht über den Anfang der Abhandlung bietet und zugleich ihre allgemeine Tendenz besonders deutlich ausspricht.

„Satz 1 ist ein Lemma, mit dessen Hilfe Dreiecke, die in einem festen Punkte A beginnen, in Rechtecke MNF[23]) verwandelt werden können, die an eine durch den festen Punkt gehende Geraden AMN rechtwinklig angelegt[24]) sind (Figur 1 und 2).

Satz 2—5 sind sehr allgemeine Hilfssätze über die Differenz, insofern dabei von Zu- oder Abnahme abstrahiert wird[25]), und sie dienen zu apagogischen Beweisen der Quadraturen nur durch einbeschriebene[26]) Figuren.

Satz 6 ist am spitzfindigsten; in ihm wird mit herkömmlicher Strenge bewiesen, daß man gewisse geradlinige treppenförmige Flächen und ebenso auch Vielecke sich so lückenlos aneinander anschließen lassen kann, daß sie sich voneinander und von krummlinigen Flächen um weniger als jede beliebige gegebene Größe unterscheiden, was von anderen meist angenommen zu werden pflegt[27]). Die Lektüre dieses Satzes kann anfangs übergangen werden. Er dient jedoch dazu, das ganze Indivisibelnverfahren auf die sichersten Grundlagen zu stellen.

Satz 7 enthält die Frucht aller vorhergehenden Sätze und zeigt, wie krummlinige Figuren in Dreiecke aufgelöst werden können und wie dadurch, daß man zu diesen Dreiecken gleich große Rechtecke aufweist, ein Sektor der einen Figur in ein vierliniges Stück einer andern Figur verwandelt werden kann.“

Damit schließt der „Index des besonders Bemerkenswerten“. Die sieben ersten Sätze enthalten also nach Leibnizens Ansicht das Wichtigste der ganzen Abhandlung. Ich will sie daher genauer darstellen, und zwar gebe ich die Sätze selbst vollständig in freier Übersetzung, von den Beweisen dagegen nur den Gedankengang.

§ 5.

„Satz 1: Wenn durch die drei Ecken des Dreiecks ABC ebensoviele unbegrenzte parallele Geraden AD, BE, CF gehen, dann wird das Dreieck die Hälfte des Rechtecks sein, das gebildet wird aus dem Abstand CE der

[23]) Die 4. Ecke eines Rechtecks pflegt Leibniz nicht zu bezeichnen.

[24]) normaliter applicata; das ist derselbe Ausdruck, der auch für die Ordinaten gebraucht wird, die rechtwinklig nach der Abszissenachse hin gezogen werden.

[25]) d. h. über den absoluten Wert der Differenz.

[26]) nicht auch umbeschriebene.

[27]) d. h. es ist allgemein üblich, einen Fehler, der kleiner als jede beliebige gegebene Größe ist, als nicht vorhanden zu betrachten.

beiden Parallelen BE und CF und dem Abschnitt AG der dritten Parallelen AD, der zwischen der Ecke A des Dreiecks und dem Schnittpunkte G von AD mit der wenn nötig verlängerten Seite BC liegt."

Zum Beweise wird von A das Lot auf BC oder seine Verlängerung gefällt; dann ist Dreieck AHG ähnlich CEB, also das Rechteck AG · CE gleich dem Rechteck AH · CB oder dem doppelten Dreieck ABC.

In der Anmerkung (Scholium) wird auf die vielfältige Anwendbarkeit verwiesen, denn „in ein- und demselben Dreieck können auf unendlich viele Arten Parallelen gezogen und Abstände gewählt werden". (Figur 2 gibt ein paar Beispiele davon.) Vor allem aber weist Leibniz darauf hin, daß dieses „Lemma", so leicht und einfach es sei, doch eine große Fruchtbarkeit für die Erweiterung der Cavalierischen Indivisibelnmethode besitze. Denn „da es die Naturen des Rechtecks und Dreiecks miteinander verbindet", so kann man mit seiner Hilfe krummlinige Figuren nicht nur wie Cavalieri und andere Mathematiker in Rechtecke, sondern auch in Dreiecke zerlegen, wie in Satz 7 noch klarer gezeigt werden wird. Zu diesem Zwecke wird es natürlich nötig sein, die Dreiecke immer kleiner werden zu lassen. Das Lemma bleibt aber auch beim Grenzübergange zu unendlich kleinen Dreiecken erhalten. Es gilt nach Leibnizens Überzeugung für das Gebiet des Endlichen und des Unendlich-Kleinen gemeinsam.

Ähnliches beabsichtigt er auch mit den Sätzen 2—5. Es sind „Lemmata" aus der Reihen- und Differenzenlehre, die hier auch zunächst für das Gebiet endlicher Reihen ausgesprochen werden, aber nach Leibnizens Überzeugung, wenigstens in vielen Fällen, auch auf unendliche Reihen ausgedehnt werden können.

Zunächst gibt er eine Einteilung der Reihen in zwei Arten: Als natürliche Ordnung (ordo naturalis) bezeichnet er diejenige, bei der man nur vom Größeren zum Kleineren oder nur vom Kleineren zum Größeren fortschreitet. Es sind also Zahlenfolgen, die man heute als „monoton" bezeichnet. Im Gegensatz zu der natürlichen Ordnung steht die gestörte Ordnung (ordo perturbatus), bei der abwechselndes Steigen und Fallen vorkommt. Für die Differenzen derartiger Reihen gilt Satz 2: „Die Summe der Differenzen von Größen, die sich in gestörter Ordnung befinden, ist größer als die Summe der Differenzen derselben Größen, wenn sie in natürlicher oder weniger gestörter Ordnung stehen". Leibniz führt den Beweis zunächst für drei Glieder A, A+B, A+B+C. Durch Störung der natürlichen Ordnung kann die Summe der Differenzen nur größer werden, denn bei der natürlichen Reihenfolge besitzen je zwei benachbarte Glieder den denkbar kleinsten Größenunterschied. (Zum Verständnis ist zu beachten, daß Leibniz nur positive Größen A, B, C benutzt und die Größenunterschiede absolut rechnet, wie schon im Index erwähnt ist und im Scholium zu Satz 4 und 5 noch besonders betont wird.) Wenn die Reihe länger wird

und ihre Glieder noch weiter oder häufiger aus der natürlichen Ordnung entfernt werden, so wiederholt sich derselbe Vorgang mehrfach. Also gilt der Satz allgemein.

Satz 3 baut unmittelbar auf dem Satz 2 auf und lautet: „In einer Reihe beliebig vieler Größen kann die Differenz der äußersten Glieder nicht größer sein als die Summe aller Zwischendifferenzen, d. h. der Differenzen der unmittelbar benachbarten Glieder." Heißt die Reihe A,B,C,D,E und ist $|A-B|=f$, $|B-C|=g$, $|C-D|=h$, $|D-E|=l$, $|A-E|=m$, so wird behauptet: $m \leq f+g+h+l$. Den Fall der Gleichheit liefert jede natürlich geordnete Reihe, und zwar sowohl die monoton zunehmende wie die monoton abnehmende Reihe. Ist die natürliche Ordnung der Glieder gestört, dann ist nach Satz 2 die Summe der Differenzen größer als im Falle der natürlichen Ordnung, also größer als die Differenz des größten und kleinsten Gliedes, also erst recht größer als die Differenz zweier anderer Glieder, insbesondere der beiden äußersten A und E.

In einer Anmerkung zu Satz 2 und 3 fügt Leibniz hinzu, diese beiden Sätze seien allgemeiner als nötig gefaßt worden. Im folgenden brauche er sie nur für den besonderen Fall dreier Größen. Er habe es aber doch vorgezogen, sie ganz allgemein auszusprechen und zu beweisen, weil sie eine dermaßen universelle Gültigkeit besäßen, daß sie überhaupt keine, noch so verschiedenartigen Größen ausschlössen. An dieser Stelle zeigt sich wieder einmal besonders deutlich die charakteristische Verallgemeinerungstendenz Leibnizens: Er strebt nach möglichst universell gültigen Theorien, die von der umfassendsten Bedeutung für zahllose Einzelfälle sind. Hier denkt er insbesondere an eine universelle Theorie der Differenzen, die von größtem Werte für die Reihenlehre sein wird[28]). Insbesondere bildet der erste Fall des Satzes 3 ($m=f+g+h+l$) die Grundlage der wichtigen Methode der Summation einer Reihe mit Hilfe einer anderen, deren Differenzenreihe sie ist. Daß Leibniz dies wirklich im Auge gehabt hat, sieht man aus einem im früheren Entwurf A stehenden Korollar: „Wenn eine Reihe bis ins Unendliche abnimmt, so ist das größte Glied gleich der Summe der Differenzen." Das ist einer der wichtigsten Grundsätze zur Summation unendlicher Reihen. Dies Korollar ist freilich von Leibniz später wieder gestrichen worden, weil es aus dem gegenwärtigen Zusammenhange zu weit herausfällt.

Die Sätze 4 und 5 gehören wiederum zusammen. In Satz 4 wird behauptet: „Die Differenz zweier Größen kann nicht größer sein als die Summe der Differenzen einer dritten Größe von den beiden." Der Beweis ergibt sich sofort unter Anwendung des vorhergehenden Satzes. Es ist nur nötig, die Größen in eine Reihe zu ordnen:

[28]) Vgl. den im Literaturverzeichnis angeführten Aufsatz von Jos. E. Hofmann u. H. Wieleitner, und die Zusätze dazu von D. Mahnke.

A C E A E

Differenzen: b d f

dann ist nach Satz 3: $f \leqq b + d$.

Satz 5, der später zum Beweise des Satzes 7 herangezogen wird, lautet: „Die Differenz zweier Größen ist kleiner als die Summe zweier anderer Größen, von denen die eine die Differenz der einen früheren von der dritten Größe, die andere die Differenz der anderen früheren von der dritten Größe übersteigt." Der Satz läßt sich in Buchstaben so formulieren:

Voraussetzung: In der Reihe: A,C,E ist

$|A—C| = b$, $|C—E| = d$, $|A—E| = f$. $b < g$, $d < h$.

Behauptung: $f < g + h$.

Beweis: $g + h > b + d$ (folgt aus der Voraussetzung).

$b + d \geqq f$ (nach Satz 4).

$g + h > b + d \geqq f$, also $g + h > f$.

In der den beiden letzten Sätzen beigefügten Anmerkung hebt Leibniz abermals, ähnlich wie in der Anmerkung zu Satz 2 und 3, hervor, daß auch die Sätze 4 und 5, obwohl sie ziemlich selbstverständlich seien, hier doch ausdrücklich angeführt würden, teils weil sie für den apagogischen Beweis von Satz 7, nur mit Hilfe von eingeschriebenen, ohne umgeschriebene Polygone, gebraucht würden, teils aber auch weil sie selbst von allgemeinerem Interesse seien. Denn „es scheint der Mühe wert, die Eigenschaften der Differenzen an sich zu betrachten, unter Abstraktion von der Zu- oder Abnahme, indem nämlich nicht zum Ausdruck gebracht wird, welche der verschiedenen Größen die kleinere, welche die größere ist."

Leibniz beabsichtigt hier also die Schöpfung einer allgemeinen Differenzenrechnung, und zwar einer solchen, bei der die Differenzen nur ihrem absoluten Werte nach betrachtet werden. Diese Differenzenrechnung ist einerseits von Bedeutung für die Reihenlehre, wie wir schon aus dem früheren Korollar zu Satz 3 erkannten, andererseits bildet sie auch eine wichtige Grundlage für den auf sie folgenden strengen Beweis der Infinitesimalgeometrie. Allerdings werden diese Ansätze in unserer Abhandlung noch nicht zu Ende geführt: Die Anwendbarkeit der Differenzenrechnung auf die Lehre von den unendlichen Reihen wird in der endgültigen Fassung überhaupt nicht mehr erwähnt, und der Beweis der infinitesimalgeometrischen Transformation in Satz 6 und 7 hat, wenn er auch die dem Gebiete der Arithmetik und niederen Analysis entstammenden abstrakt-begrifflichen Sätze 2—5 mit heranzieht, doch im Ganzen durchaus konkret-anschaulichen Charakter: Leibniz bleibt noch im Bereich der Geometrie und erhebt sich noch nicht zur reinen Analysis.

Und doch läßt sich wenigstens die Tendenz zur Schöpfung einer höheren Analysis als sicherer Grundlage der Infinitesimalgeometrie schon hier nicht verkennen. Ja, man sieht bereits den Weg vorgezeichnet, wie diese

Grundlegung erfolgen könnte. Zunächst müßte die Reihenlehre weiter ausgebaut werden. Bei monotonen Zahlenfolgen ist die Differenz der äußersten Glieder gleich der Summe der ganzen zugehörigen Differenzenreihe. Dieser Satz bleibt, wie wir hörten, auch dann gültig, wenn beliebig viele Glieder dazwischen geschaltet werden, also auch im Grenzfalle: bei unendlichen Reihen. Er bleibt ferner gültig, wenn das letzte Glied der monoton abnehmenden Reihe kleiner und kleiner wird, also auch im Grenzfalle: wenn es unendlich klein wird. Hier findet sich also die Möglichkeit einer exakten, rein arithmetischen Grenzbetrachtung. Und diese könnte dann dazu dienen, um auch die Infinitesimalgeometrie exakt zu fundamentieren, indem z. B. der Flächeninhalt als eine Größe erkannt wird, die sich als Summe einer Reihe von Größen darstellen läßt, bei der man in ganz ähnlicher Weise wie bei den eben betrachteten Zahlenreihen zur Grenze übergehen kann.

So hat es Leibniz zwar jetzt noch nicht gemacht, wohl aber, wie wir sehen werden, in späterer Zeit. Schon hier jedoch erkennen wir in der Voranstellung der allgemeinen Sätze aus der Differenzen- und Reihenlehre vor die Infinitesimalgeometrie wenigstens den ersten Anfang der höheren Analysis, insbesondere den Beginn der Arithmetisierung und streng begrifflichen Fassung des Grenzbegriffes.

§ 6.

Auf den Beweis der Hilfssätze 2—5 aus der Differenzenrechnung folgt nunmehr als 6. Satz die Grundlegung der Infinitesimalgeometrie durch den Nachweis der Möglichkeit, eine krummlinig begrenzte Fläche durch eine geradlinig begrenzte treppenförmige Fläche beliebig genau anzunähern. Dieser Satz ist, wie wir schon im „Index notabiliorum" hörten, „sehr spitzfindig", und Leibniz hält es deshalb, wie er in einer Vorbemerkung bei Satz 6 noch einmal hervorhebt, für besser (satius), ihn bei der ersten Lektüre zu übergehen und erst am Schlusse, wenn man die ganze Sache verstanden habe, zu ihm zurückzukehren, „damit nicht seine übertriebene Genauigkeit (scrupulositas) den vorzeitig ermüdeten Geist von den übrigen, weit angenehmeren Sätzen abschrecke". Für unsere Absichten aber ist eben dieser Satz 6 der wichtigste von allen. Denn gerade hier stellt sich Leibniz mit völlig klarem und deutlichem Bewußtsein die Aufgabe, die überkommene Indivisibelnmethode auf eine neue, ganz sichere Grundlage zu stellen, und löst diese Aufgabe dadurch, daß er zwei Flächen, eine z. T. krummlinig und eine ganz geradlinig begrenzte, die in die erstere „übergeht (desinit), wenn man mit der Einbeschreibung bis ins Unendliche fortschreitet, schon im Falle einer endlichen Anzahl von Einbeschreibungen sich bis auf einen Unterschied, der kleiner als jeder beliebig angegebene ist, einander annähern läßt (conficit ... ad differentiam assignatā qvāvis minorem sibi appropinqvare)". Mehr braucht

man auf diesem Gebiete nicht zu leisten, denn mehr leisten auch die nicht, „die sich anheischig machen, ganz strenge Beweise zu bringen". In der Tat ist Leibnizens Verfahren, wie wir sehen werden, dem antiken Exhaustionsbeweise eng verwandt und von durchaus gleichwertiger Strenge.

Er geht aber doch in zahlreichen Hinsichten über das Verfahren etwa des Archimedes hinaus, zunächst dadurch, daß er sich der von Descartes eingeführten Methode der analytischen Geometrie bedient, und zwar in einer schon wesentlich moderneren Fassung als Descartes selbst. Auch über diesen Punkt muß ich, obwohl er nicht zu meinem eigentlichen Thema gehört, kurz berichten, weil er zum Verständnis der Leibnizschen Darstellung nötig, übrigens auch an sich interessant ist. Während Descartes von den Punkten der zu untersuchenden Kurve nur nach einer (gewöhnlich horizontal liegenden) Achse der Reihe nach Geraden unter gleichem (meist schiefem) Winkel zieht, die sogenannten „appliquées par ordre", und auf der Achse einen Punkt A annimmt „pour commencer par luy ce calcul", bezieht Leibniz von vornherein die Kurve auf die beiden Schenkel eines rechten Winkels TAB (siehe Figur 3), die gelegentlich sogar schon miteinander vertauscht werden. Allerdings pflegt Leibniz, dem Vorbilde des Honoratus Fabri folgend, die Abszissenachse (wie wir sie jetzt nennen) vom höchsten Punkte der Kurve senkrecht nach unten zu legen[29]). Wenn man aber seine Zeichnungen um 90° im positiven Sinne dreht, so erhält man genau die heute noch übliche Koordinatendarstellung.

Ich erwähne bei dieser Gelegenheit, daß einige dem Satz 7 beigegebenen Definitionen für die Entwicklungsgeschichte der analytischen Geometrie, namentlich ihrer Terminologie, sehr wichtig sind. Hier hat Leibniz zuerst unter den vielen verschiedenen, früher üblichen Bezeichnungen eine feste Wahl getroffen und durch sein dauerndes Eintreten dafür der heute üblichen Terminologie wahrscheinlich mit zum Siege verholfen. Er entscheidet sich für ordinatae statt der sonst auch gebrachten Bezeichnungen: ordinatim applicatae oder parallelae, und für abscissae[30]) statt: portiones axis.

[29]) Ähnlich machen es auch Cavalieri, Pascal, Huygens u. a. Fabri hat aber zuerst auf Leibniz gewirkt. Von ihm hat Leibniz auch die Gewohnheit übernommen, die Kurven rechts von der senkrechten Achse zu zeichnen, während Pascal die linke, Huygens keine bestimmte Seite bevorzugt. Vgl. Mahnke, Neue Einblicke, S. 26.

[30]) Dieser Ausdruck kommt schon bei Cavalieri vor und wird bereits bei Michelangelo Ricci als Fachwort gebraucht. Leibniz hat ihn wahrscheinlich von dem Letzteren übernommen, dessen „Exercitatio de maximis et minimis" hier im Satz 15 zitiert wird. In der Literatur wird seit der Encyclopédie des sciences mathématiques, Tom. III, vol. 3, fasc. 1, p. 1 mehrfach behauptet, Leibniz habe durch seine Briefe an Oldenburg vom 26. Okt. und 1. Nov. 1675 entscheidend für den Terminus „abscissa" gewirkt. Von diesen Daten stammen aber keine Briefe an Oldenburg. Gemeint sind vielmehr zwei Teile der großen Handschrift: „Analysis

Noch wichtiger aber ist, daß er auch schon eine gemeinsame Bezeichnung: ordinatae conjugatae einführt, was er dann später kurz zu: coordinatae zusammengezogen hat[31]). Die Gerade, nach der die Ordinaten gezogen werden, nennt er im allgemeinen: directrix und im besonderen, bei einem rechten Winkel: axis. Die beiden Schenkel des Winkels, auf den die Kurve bezogen wird, heißen zusammen: directices conjugatae, oder im besonderen Falle eines rechten Winkels: axes conjugatae (entsprechend dem heutigen Ausdruck: Koordinatenachsen). Daß die Achsen und die Ordinaten als „konjugiert" bezeichnet werden (wie die konjugierten Durchmesser von Kegelschnitten), begründet Leibniz ganz klar damit, daß „die Abszissen der einen Achse den Ordinaten in Bezug auf die andere Achse gleich sind und umgekehrt". Er hebt auch ausdrücklich hervor, daß diese Vertauschbarkeit von großer Bedeutung in der ganzen Geometrie, besonders aber im Gebiet der Quadraturen sei. (Er benutzt sie z. B., um, modern gesprochen, bei Integrationen die unabhängige Variable x und die abhängige Variable y zu vertauschen.) Endlich ist noch zu erwähnen, daß Leibniz hier auch schon die Verallgemeinerung der parallelen in „konvergente Ordinaten" ins Auge faßt[32]) nach dem Vorbilde der Desarguesschen und Pascalschen Kegelschnittslehre, die bekanntlich den Anfang der projektiven Geometrie bedeutet. Im folgenden will Leibniz aber immer rechtwinklige Parallelkoordinaten verwenden.

§ 7.

Viel bedeutsamer jedoch als dieser Beitrag Leibnizens zur Weiterentwicklung der analytischen Geometrie Descartes' ist seine Arbeit an der Umbildung der Indivisibelnmethode Cavalieris geworden. Um das richtig zu würdigen, muß ich diese zunächst kurz charakterisieren. Cavalieri dachte sich in seiner „Geometria indivisibilibus continuorum nova qvadam ratione promota"[33]) zum Zwecke von Quadraturen und Kubaturen die ebenen Flächen „nach Art eines Gewebes, das aus parallelen Fäden zusammengesetzt ist", und die räumlichen Körper „nach Art von Büchern,

Tetragonistica ex Centrobarycis" (Gerhardt, Briefwechsel S. 151 u. 158). Diese aber ist erst von Gerhardt (zuerst in den Monatsber. der Berliner Akad. 1851, S. 344—358) veröffentlicht, kann also unmöglich vorher Einfluß ausgeübt haben. Höchstens könnten die Briefe an Oldenburg (für Newton) vom 27. Aug. 1676 und 21. Juni 1677 (Math. Schr. I, besonders S. 115 und 154) genannt werden, die schon zu Leibnizens Lebzeiten mehrfach gedruckt worden sind. Noch einflußreicher aber waren seine Aufsätze in den Acta Eruditorum seit 1682 (vgl. z. B. für die Termini abscissa und ordinata Math. Schr. V, S. 118, 123, 126, 220 und öfter), die auch sonst für die Terminologie der deutschen Mathematik ausschlaggebend wurden.

[31]) Spätestens 1692 (Math. Schr. V, S. 268, 301).

[32]) Weiter ausgeführt 1692, siehe vorige Anmerkung.

[33]) Bologna 1635; weitergeführt in den „Exercitationes geometricae sex"; Bologna 1647; vgl. die Auszüge aus beiden Werken in Gerhardts Gesch. d. h. Analysis I, S. 18—27.

die aus übereinander geschichteten Blättern bestehen", nur ohne Dicke, also vielmehr als „Anhäufungen von unteilbaren Linien oder Flächen (indivisibilium sive linearum, sive planorum congeries)", die sämtlich einer bestimmten Grundlinie oder Grundfläche, der sogenannten „regula", parallel liegen. Die Flächen- oder Rauminhalte verhalten sich dann nach Cavalieri ebenso wie „alle Linien" oder „alle Flächen", mit einem Worte „alle Indivisibeln zusammengenommen (omnia indivisibilia collective)", natürlich jedesmal die zu einer bestimmten „Regel" gehörigen. Sollte aber jemand dagegen Bedenken äußern, daß hierbei Flächen als Summen von unendlich vielen unendlich dünnen indivisiblen Linien, und Körper als Summen von unendlich vielen unendlich dünnen indivisiblen Flächen aufgefaßt werden, so bliebe immer noch die Möglichkeit, die Indivisibeln „gesondert (distributive)" zu betrachten und den Inhalt einer ebenen oder räumlichen Figur auf den einer andern zurückzuführen, die in gleichem Abstand von der Basis immer gleiche (oder proportionale) Parallelschnitte ergibt und daher als gleichgroß (oder proportional) angesehen werden darf.

Mit Hilfe dieses letzteren „Cavalierischen Prinzips" und in noch weiterem Umfange mit der früheren Indivisibelnmethode gelangen den damaligen Mathematikern verschiedene neue „Integrationen", wie wir jetzt sagen würden. Aber es kamen auch verschiedene Fehlschlüsse vor, weil es Cavalieri nicht gelang, seinen Indivisibelnbegriff genau zu definieren und seine Methode zuverlässig zu begründen. Das Wort „indivisibile", das Cavalieri aus der scholastischen Philosophie übernommen hatte, ist nichts anderes als die lateinische Übersetzung des griechischen „atomos". Die Indivisibelntheorie setzt also eigentlich einen diskret-atomistischen Aufbau der geometrischen Gebilde voraus, z. B. der Linien aus letzten, nicht weiter teilbaren Linienelementen von ganz kleiner, aber endlicher Länge, der Flächen aus ganz schmalen, in der Breite nicht weiter teilbaren Flächenelementen usw. Aber diese Auffassung, die wahrscheinlich Demokrit vertreten hat, wird der Kontinuität der geometrischen Gebilde nicht gerecht. Deshalb sprachen andere griechische Denker den unteilbaren Linienelementen die Ausdehnung völlig ab und identifizierten sie mit unausgedehnten Punkten, die erst durch Bewegung eine Linie erzeugen können; analog faßten sie auch die Flächenelemente usw. auf. Aber bei dieser Auffassung kann man nun andererseits die Indivisibeln nicht mehr als Rechengrundlage verwenden, denn durch Addition oder Aneinandersetzung beliebig vieler Punkte ergibt sich nie eine Linie, durch Nebeneinanderfügung beliebig vieler Linien niemals eine Fläche usw. Deshalb zogen die griechischen Mathematiker es vor, die Indivisibelnmethode ganz aus der Wissenschaft zu verbannen und nur noch als erstes, grobes Hilfsmittel zur näherungsweisen Entdeckung neuer Erkenntnisse zu benutzen, das aber immer einer genauen Nachprüfung und eines strengen Beweises anderer Art bedürfe.

Cavalieri dagegen wollte die Indivisibelnmethode als alleiniges Mittel zur Entdeckung und zum Beweis von Quadraturen usw. verwenden. Trotzdem aber legte er nicht genügenden Wert auf eine klare Begriffsbestimmung und sichere Grundlegung. Er meinte, die Mathematiker könnten die philosophische Frage unentschieden lassen, ob das Kontinuum nur aus Indivisibeln zusammengesetzt sei oder ob die diskreten Elemente noch durch etwas anderes kontinuierlich verbunden würden. Er selbst schwankte auch zwischen der diskreten und kontinuierlichen Auffassung, indem er z. B. einen Zylinder durch die Parallelverschiebung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf einer Achse läuft, erzeugt dachte und dabei die Indivisibeln als die „Spuren" bezeichnete, „die man sich in gewisser Weise vom Kreise zurückbleibend denke, wenn er von der einen Basis zur andern in gleichem Abstand von ihr stetig hinfließe (vestigia plani . . . . continuo illi aequidistanter fluentis)". Das „Fließen" deutet auf die Stetigkeit, die einzelnen zurückbleibenden „Spuren" dagegen auf diskrete Teile, wie sie ja auch bei der Betrachtung gleich weit von der Basis entfernter Schnitte verschiedener Körper immer wieder gesondert herausgegriffen werden. Aber Cavalieri meint, es sei einerlei, ob man es sich so oder so denke, jedenfalls seien die kontinuierlichen Ganzen den Indivisibeln proportional, allerdings nicht ihrer Anzahl, die unendlich und unbestimmbar sei (infinita, indefinita numero), sondern der endlichen, bestimmten Größe (magnitudo finita, diffinita, die „dem von den Indivisibeln eingenommenen Raum gleich sei (adaequatur spatio . . occupato)". Indes wie es möglich ist, daß die unzählbaren unausgedehnten Indivisibeln einen Raum „einnehmen" und daß dessen Größe sich sogar rechnerisch bestimmen läßt, darüber sagt Cavalieri garnichts.

Diese bedenkliche Lücke sucht Leibniz nun auszufüllen. Unter den Definitionen bei Satz 7 findet sich u. a. die folgende Erklärung der Indivisibeln, die zwar von Cavalieris Auffassung ausgeht, aber sie dann in entscheidender Weise abändert und weiterbildet: „Unter der Summe der Geraden, die an irgendeine Achse angelegt sind (applicatarum), verstehen wir die Fläche der Figur, die durch die fortgesetzte Anlegung entsteht, z. B. wenn ich sage, die Summe aller AT an der Achse AB (Figur 3), so meine ich die Figur, die aus allen AT entsteht, wenn sie in den entsprechenden Punkten B der Reihe nach angelegt werden[34]), z. B. wenn A_1T[35]) in das

[34]) ordine applicatae; derselbe Ausdruck, der auch für die Ordinaten gebraucht wird.

[35]) Leibniz bedient sich, um gleichartige Punkte zu bezeichnen, desselben Buchstabens mit verschiedenen voran gestellten Ziffern, wie das schon vor ihm Descartes, allerdings nur ganz vereinzelt, getan hatte (La Géometrie, Erstausgabe im Anhang des Discours de la méthode, Leyden 1637, S. 406 und 408; nicht erst Fr. van Schooten in der lateinischen Übersetzung der „Geometria", Leyden 1659, S. 112, wie Eneström in der Bibl. math. XI, 1910/11, S. 170 und Tropfke, Gesch. d. Elementarmath. 2. Aufl. II, S. 46 behaupten). Da Leibniz die Ziffern halb so groß wie die großen Buchstaben zu schreiben pflegt, so sieht das schon fast wie

gleich große $_1B\,_1D$[35]) verschoben[36]) und so an die Abszisse $A\,_1B$ angelegt wird usw. Der Winkel der Anlegung pflegt als rechter gedacht zu werden. Es ist aber nicht nötig, daß die Angelegten (oder Ordinaten) bis zur Achse selbst reichen, wie z. B. die Summe der Differenzen zwischen den AT und BC, die den CD gleich sind, die Fläche der Figur $_1D\,_1C\,_2C\,_3C\,_3D\,_2D\,_1D$ ergibt." So weit schließt sich Leibniz eng an Cavalieri an, nur daß er sich auch hier (aus guten Gründen, wie wir gleich sehen werden) für die rechtwinklige Anlegung, statt der von Cavalieri ebenso gern verwandten schiefwinkligen, entscheidet. Dann aber fährt er fort: „Diese Redeweisen (loquendi formulae) werden dann erlaubt sein, wenn man in Figur 8 unter der Summe aller Geraden, z. B. aller BC (d. h. $_1B\,_1C$ und $_2B\,_2C$ und $_3B\,_3C$ usw.) die Summe aller Rechtecke versteht, z. B. $_0B\,_1B\,_1C\,_0P$, $_1B\,_2B\,_2C\,_1P$ usw.[37]), die als Seiten jene Geraden $_1B\,_1C$, $_2B\,_2C$ usw. und das konstante, immer gleiche[37]) Intervall $_0B\,_1B$ oder $_1B\,_2B$ usw. haben, das in unbegrenzter Kleinheit angenommen wird (indefinitae parvitatis assumto). Alles nämlich, was sich von einer solchen Summe beweisen läßt, wenn man das Intervall irgendwie klein (utcunqve parvum) macht, das wird auch von der Größe der krummlinigen Fläche $_0C\,_0B\,_3B\,_3C\,_0C$ bewiesen sein; denn jene Summe kann, wenn man das Intervall hinreichend klein annimmt (satis exiguo sumto) so beschaffen sein, daß ihre Differenz von der Fläche kleiner als jede beliebig gegebene ist (data qvavis minorem). Also wenn jemand unsere Behauptungen leugnet, so kann er leicht widerlegt werden, indem man zeigt, daß der Fehler kleiner als jeder beliebige angebbare (errorem qvovis assignabili minorem) und daher gar keiner ist. Wenn man allerdings diese Vorsichtsmaßregeln außer Acht läßt, dann kann man von der Indivisibelnmethode leicht getäuscht werden, wie das Beispiel im Scholium zu Satz 22 zeigen wird."

Mit diesen Ausführungen stellt sich Leibniz auf den Standpunkt, den einige französische Vorläufer der modernen Infinitesimalrechnungen bereits zur Berichtigung Cavalieris eingenommen hatten, und führt ihn konsequent zu Ende.

Schon Roberval[38]), ein persönlicher Bekannter Leibnizens in Paris,

---

die heutige Indexschreibung aus. Vergl. Mahnke, Die Indexbezeichnung bei Leibniz; derselbe, Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik S. 292/293; derselbe, Neue Einblicke S. 32.

[36]) translata.

[37]) Bei Leibniz wird die 4. Ecke der Rechtecke, $_0P$, $_1P$ usw., ungenannt gelassen. – Die Figur 8 paßt zum Text ebensowenig genau wie die vorher benutzte Figur 3. Denn in der Figur ist $_0B\,_1B$ nicht $=\,_1B\,_2B$ usw., wie hier verlangt wird.

[38]) Traité des indivisibles und Brief an Torricelli, beide in: Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique par Messieurs de l' Académie Royale des Sciences, Tom. I, Paris 1693; vergleiche die Auszüge in Gerhardt, Gesch. d. h. Anal. I, S. 30—32.

betonte ganz deutlich, daß man nicht heterogene Größen miteinander vergleichen könne, sondern Linien nur in Linien, Flächen nur in Flächen usw. von unendlicher oder unbegrenzt großer Zahl auflösen dürfe. Die Indivisibeln, aus denen man die Linien aufbauen wolle, seien also kleine Linien, nicht Punkte, und man bediene sich der Punkte lediglich als Repräsentanten der kleinen Linien, da jede Linie sich durch Punkte begrenze (se termine). Ebenso seien die Indivisibeln der Flächen schmale Flächen, deren bloße Repräsentanten die indivisibeln Linien Cavalieris seien.

Noch deutlicher sagt Pascal in seinem Brief an Carcavy[39]): „Die Sprache der Indivisibeln versteht unter dem Ausdruck: Summe der Linien (z. B. Summe der Ordinaten eines Halbkreises) . . . nichts anderes als die Summe einer unbegrenzt großen (indéfini) Zahl von Rechtecken, die aus den Ordinaten und kleinen gleichen Teilen des Durchmessers gebildet werden, und deren Summe sicher eine Fläche ist, die sich von der Fläche des Halbkreises nur um eine Größe, kleiner als irgend eine gegebene (moindre qu' aucune donnée), unterscheidet." „Ich habe diese Vorbemerkung geben wollen, um zu zeigen, daß alles, was durch die wahren Regeln der Indivisibeln bewiesen ist, auch mit der Strenge und in der Weise der Alten bewiesen werden kann."

Diese Auffassung hat Leibniz, der Pascal ja nach seinem eigenen Bekenntnis die wichtigsten Anregungen auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung verdankt, sich in seiner oben zitierten Definition der „Summe aller Geraden" offenbar zu eigen gemacht. Er sagt hier in Worten dasselbe, was er in den Symbolen seines Ende 1675 erfundenen „Calculus differentialis et summatorius" dadurch zum Ausdruck gebracht hat, daß er seine Abkürzung für das Cavalierische „alle x": $\int x$, d. h. „Summe der x", bald zu $\int x\,dx$ vervollständigt hat[40]).

§ 8.

Aber Leibniz geht auch noch in anderer Hinsicht über Pascal hinaus, indem er nämlich Pascals kurze Behauptung, daß die Indivisibelnmethode, so aufgefaßt, sich sogar mit antiker Strenge beweisen lasse, durch einen wirklich ausgeführten Beweis vollständig rechtfertigt. Dieser

[39]) Oeuvres de Pascal. Publ. par Brunschvicg etc. Tom. VIII p. 325–IX 133, insbesondere VIII 353, Paris 1914. Leibniz hat den Brief in der Ausgabe: „Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses Inventions de Géometrie" Paris 1659, genau studiert und sich einen Auszug angefertigt, in dem z. B. die oben zitierte Stelle über den wahren Sinn des Indivisibelnbegriffes mit NB herausgehoben ist. Vgl. Mahnke, Neue Einblicke . . . S. 28 und 32.

[40]) Die Bezeichnung $\int x$ gebraucht Leibniz zuerst am 29. Okt. 1675, aber schon am 11. Nov. 1675 findet sich die Gleichung $\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$ (Gerhardt, Gesch. d. höh. Anal. I, S. 125, 135.) In den Randbemerkungen eines Handexemplares von Barrows Lectiones Geometricae aus etwa derselben Zeit schreibt er: $\int \overline{TZ}$ ad DH usw. Vgl. Mahnke, Neue Einblicke . . . S. 23.

findet sich als Anhang am Schlusse des Beweises von Satz 6[41]) und lautet, etwas gekürzt, folgendermaßen:

Wenn (in Figur 3) eine Kurve $_1N\ _2N\ _3N$ usw. durch die Ecken einer treppenförmigen Fläche hindurchgeht, die aus den sogenannten Elementarrechtecken $_1N\ _1B\ _2B\ _1P$, $_2N\ _2B\ _3B\ _2P$ usw. zusammengesetzt ist, dann ist die Differenz der gemischtlinigen Fläche $_1N\ _1B\ _3B$ usw. $_3N\ _2N\ _1N$ und jener Treppenfläche gleich der Summe der kleinen dreilinigen Flächen $_1N\ _1P\ _2N$, $_2N\ _2P\ _3N$ usw. Diese aber ist kleiner als die Summe der kleinen, ihnen umschriebenen Rechtecke $_1N\ _1P\ _2N$, $_2N\ _2P\ _3N$ usw.[42]), die Leibniz „Ergänzungsrechtecke" nennt. Die Summe der Ergänzungsrechtecke aber wird niemals größer als das Rechteck, das gebildet wird von der Summe der Grundlinien $_1P\ _2N$, $_2P\ _3N$ usw. multipliziert mit einer Höhe (falls alle Höhen gleich sind, wie bei der gewöhnlichen Indivisibelnmethode angenommen wird; andernfalls müßte man die größte Höhe nehmen).

Nun ist aber die Summe der Grundlinien der Ergänzungsrechtecke sicher nicht größer als die Grundlinie des letzten Elementarrechtecks. Wenn man also die Höhen der Elementarrechtecke gleich (oder die letzte als die größte) wählt, so ist die Differenz der gemischtlinigen Fläche $_1N\ _1B\ _3B$ usw. $_3N\ _1N$ und der Treppenfläche $_1N\ _1B\ _3B$ usw. $_2P\ _2N\ _1P\ _1N$ sicher nicht größer als das letzte Elementarrechteck. Nun kann man aber durch hinreichende Vermehrung der Zwischenpunkte, $_2N$, $_3N$ usw., die Höhe $_2B\ _3B$ der Elementarrechtecke und damit zugleich die Fläche jedes einzelnen, auch des letzten, beliebig klein machen. Also kann auch die Differenz zwischen der treppenförmigen und der gemischtlinigen Fläche kleiner als irgend eine gegebene Fläche gemacht werden.

Die Treppenfläche oder die Summe der Elementarrechtecke ist nun aber gleich der Summe ihrer Grundlinien, das heißt der Ordinaten der Kurve $_1N\ _2N\ _3N$, je multipliziert mit dem kleinen Abstand zweier benachbarten Ordinaten, also genau das, was die gewöhnliche Indivisibelnmethode[43]) unter der „Summe aller Ordinaten" versteht. Somit ist auch die Indivisibelnmethode streng bewiesen (severè demonstrata). „Also alles, was von der Summe der Linien oder dem treppenförmigen Flächenraum in dem Sinne bewiesen werden kann, daß es gilt, wie weit auch immer (die Verkleinerung der Stufen) der Treppenfläche fortgesetzt wird (utcunqve producatur), und daß es dann am meisten statt hat, wenn die Abstände der Ordinaten hinreichend klein sind, das gilt auch für die gemischtlinige Fläche, d. h. wenn ein Fehler begangen wird, dann ist er kleiner als irgendein angebbarer Fehler."

[41]) Ich nehme den Beweis der Indivisiblenmethode als den einfacheren voraus, während er bei Leibniz als nachträgliche Vereinfachung eines allgemeineren und komplizierteren Beweises dahintergestellt ist.

[42]) Die 4. Ecke ist wieder unbezeichnet.

[43]) Leibniz vergißt hinzuzufügen: in der von Pascal verbesserten Auffassung.

Durch diese Ausführungen hat Leibniz die unbestimmten Cavalierischen Begriffe der Indivisibeln und ihrer Allheiten, wenn auch nicht dem Ausdrucke, so doch dem Sinne nach endgültig in die exakten Begriffe der Differentiale und (bestimmten) Integrale übergeführt, und er hat ihre Anwendung bei der Quadratur krummlinig begrenzter ebener Flächen auch schon ganz im modernen Sinne gerechtfertigt durch den Nachweis, das bei „genügender" Verkleinerung der Differentiale der Wert des Integrals „beliebig" genau mit der Größe des Flächenraumes übereinstimmt.

§ 9.

Aber Leibniz ist mit dem Geleisteten noch nicht ganz zufrieden. Er bemerkt nämlich zunächst, daß er, um genau zu sein, noch einschränkende Bedingungen über die Kurve hinzufügen müßte. Sein Beweis gilt z. B. nur, wenn die Ordinaten der Kurve monoton wachsen. Ferner denkt er daran, daß es in der griechischen Mathematik üblich war, den gesuchten Flächenraum nicht nur mit einem einbeschriebenen kleineren, sondern auch mit einem umbeschriebenen größeren Flächenraum zu vergleichen. Und endlich beabsichtigt er, die übliche Zerlegung der Flächen in kleine Rechtecke durch die von ihm neu erfundene in kleine Dreiecke (siehe oben Seite 13 und 17) zu ergänzen und alles das in einem einheitlichen Beweise gemeinsam zusammenzufassen.

Zu diesem Zwecke führt er im Hauptteil des Satzes 6, unter wiederholter Benutzung der in Satz 1 begründeten Transformation von Dreiecken in Rechtecke, die folgenden Konstruktionen aus. Von den Punkten $_1C$, $_2C$ usw. einer Kurve, die in Figur 3 im Hinblick auf den Hauptgegenstand der Abhandlung als Kreis gezeichnet ist, die aber (mit einigen, später erwähnten Einschränkungen) beliebig angenommen werden kann, zieht er die Tangenten $_1C\,{}_1T$, $_2C\,{}_2T$ usw. bis zum Schnitt mit dem horizontalen Schenkel des rechten Winkels TAB (d. h. bis zur Ordinatenachse). Die Abschnitte $A\,{}_1T$, $A\,{}_2T$ usw. nennt er in Satz 7 „resectae".

Durch die Tangentenschnittpunkte $_1T$, $_2T$ usw. legt er Parallelen zum anderen Schenkel des rechten Winkels (d. h. zur Abszissenachse), die je die zugehörige Ordinate in $_1D$, $_2D$ usw. und die nächste Ordinate in $_1E$, $_2E$ usw. schneiden. Die Verbindungslinie der ersten Schnittpunkte ist eine neue Kurve $_1D\,{}_2D$ usw., die Leibniz, weil ihre Ordinaten gleich den Resekten der ursprünglichen sind, ihre „Resektenfigur" nennt[44]). Nun werden auch

[44]) Die spezielle Resektenfigur des Kreises, die in Figur 3 gezeichnet ist, hatte Leibniz bei ihrer ersten Entdeckung als „ligne courbe Anonyme" bezeichnet. Huygens wies ihn darauf hin, daß bereits James Gregory sie benutzt habe, um den Zusammenhang der Kreis- und Zissoiden-Berechnung zu zeigen, und schlug deshalb den Namen Zyklozissoide oder so ähnlich vor (Math. Schr. II, S. 16). In der modernen Literatur trägt sie den Namen „Pseudoversiera" (Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. S. 83.)

die Sehnen $_2C\,_1C$, $_3C\,_2C$ usw. der ursprünglichen Kurve bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse in den Punkten $_1M$, $_2M$ usw. verlängert, die (unter gewissen, später zu erörternden Bedingungen) jeweils zwischen die ihnen entsprechenden Tangentenschnittpunkte fallen; und in den Sehnenschnittpunkten werden ebenfalls die Parallelen zur Abszissenachse gezogen, die je die beiden ihnen entsprechenden Ordinaten in den Punkten $_1N$ und $_1P$, $_2N$ und $_2P$ usw. schneiden. Durch diese letztere Konstruktion entsteht dieselbe Treppenfläche $_1N\,_1B\,_4B\,_3P\,_3N\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$, die beim Beweis der „gewöhnlichen Indivisibelnmethode" benutzt wird. Sie wird aber jetzt nicht mit der viereckigen gemischtlinigen Fläche $_1N\,_1B\,_4B\,_4N\,_3N\,_2N\,_1N$ verglichen, der sie *einbeschrieben* ist, sondern mit der Resektenfläche $_1D\,_1B\,_4B\,_4D\,_3D\,_2D\,_1D$, deren Begrenzungskurve die Treppenstufen schneidet, so daß ein Mittleres zwischen Ein- und Umbeschreibung entsteht.

Nach diesen Vorbereitungen wird jetzt in Satz 6 behauptet: „Auf den beiden Kurven lassen sich zwischen $_1C$ und $_4C$ Punkte C und zwischen $_1D$ und $_4D$ Punkte D *einander so nahe und in solcher Zahl angenommen denken*, daß der geradlinige treppenförmige Flächenraum $_1N\,_1B\,_4B\,_3P\,_3N\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$ sich von dem vierlinigen Flächenraum $_1D\,_1B\,_4B\,_4D$ usw. $_1D$ (der von der Achse $_1B\,_4B$, den äußersten Ordinaten $_1B\,_1D$, $_4B\,_4D$ und der Resektenkurve $_1D\,_2D$ usw. begrenzt wird) nur um eine Größe unterscheidet, die *kleiner als jede beliebige gegebene* ist. Und derselbe Beweis hat statt bei jedem beliebigen anderen gemischtlinigen und treppenförmigen Flächenraum, der durch *stetige Anlegung* (continua applicatione) von Geraden an eine Achse gebildet wird Es ist aber erforderlich, daß die Kurven nach derselben Seite gekrümmt sind und keine Reversionspunkte haben, oder wenigstens in derartige Stücke zerlegt werden können."

Unter Reversionspunkten versteht Leibniz nicht Rückkehrpunkte im heutigen Sinne, d. h. Spitzen. Solche sind bei ihm freilich auch ausgeschlossen, ohne daß es hier besonders gesagt wird; denn er beschränkt sich immer auf stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen. Für die Zwecke seines Beweises aber schließt er darüber hinaus sogar Wendepunkte (puncta flexuum contrariorum) und solche „Reversionspunkte" aus, in denen die Ableitung unendlich wird oder, wie er es anschaulich geometrisch formuliert, in denen die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt. Auf diese einschränkenden Bedingungen komme ich später noch genauer zurück.

Den Beweis des Satzes 6 zerlegt Leibniz in mehrere Artikel: Im ersten Artikel wird bewiesen, daß die Kurve $_1D\,_2D$ jede Treppenstufe schneidet, z. B. $_1N\,_1P$ in dem zwischen $_1N$ und $_1P$ liegenden Punkte $_1F$. Denn $_1M$ liegt zwischen $_1T$ und $_2T$ (vorausgesetzt, daß kein Wendepunkt in das Intervall fällt, was ja angenommen ist). Also liegt auch $_1M\,_1N\,_1P$ zwischen $_1T\,_1E$

und $_2T\,{}_2D$. Also kann in dem Rechteck $_1D\,{}_1E\,{}_2D$[45]) zwischen den Ecken $_1D$ und $_2D$ keine gerade oder krumme Verbindungslinie gezogen werden, die nicht $_1N\,{}_1P$ irgendwo in $_1F$ schnitte[46]), sie müßte denn oberhalb $_1D\,{}_1N$ oder unterhalb $_1P\,{}_2D$ verlaufen, wie etwa die Halbkreise mit dem Durchmesser $_1D\,{}_2D$; in diesem Falle aber würde die Kurve zwischen $_1D$ und $_2D$ einen Reversionspunkt, K oder Q, haben, was ausgeschlossen worden ist. Sonst aber schneidet das Kurvenstück $_1D\,{}_2D$ notwendig die Gerade $_1N\,{}_1P$ irgendwo in $_1F$, und ebenso schneidet das Kurvenstück $_2D\,{}_3D$ die Gerade $_2N\,{}_2P$ irgendwo in $_2F$ usw.

Im 2. und 3. Artikel wird gezeigt, daß die Differenz eines Elementarrechtecks der Treppenfigur und des zugehörigen „Teilvierseits" (d. h. der entsprechenden „Zone" des von der Resektenkurve, der Abszissenachse und den beiden äußersten Ordinaten begrenzten gemischtlinigen Vierseits) gleich der Differenz der kleinen gemischtlinigen Dreiseite ist, die jene größeren Figuren voneinander abschneiden, z. B.:

$$_1N\,{}_1B\,{}_2B\,{}_1P - {}_1D\,{}_1B\,{}_2B\,{}_2D = {}_1N\,{}_1D\,{}_1F - {}_1F\,{}_1P\,{}_2D$$

und folglich kleiner als das zugehörige Ergänzungsrechteck: $_1D\,{}_1E\,{}_2D$[45]).

Die erstere Gleichheit ergibt sich, wenn man vom Elementarrechteck und Teilvierseit je das ihnen gemeinsame Fünfseit $_1D\,{}_1B\,{}_2B\,{}_1P\,{}_1F\,{}_1D$ subtrahiert; die letztere Ungleichheit folgt daraus, daß das Ergänzungsrechteck die beiden kleinen Dreiseite zugleich, sowie sie in der Figur nebeneinander liegen, umschließt[47]), also größer als ihre Summe und erst recht als ihre Differenz ist.

Da nun dasselbe für alle folgenden Zonen ebenfalls gilt, so folgt 4., daß auch die Summe der Elementarrechtecke von der Summe der Teilvierseite, also die Treppenfläche von dem Gesamtvierseit sich um weniger als die Summe aller Ergänzungsrechtecke unterscheidet. Welche der beiden die größere ist, wird nicht gesagt. Denn wie bei Satz 4 und 5 hervorgehoben ist, betrachtet Leibniz nur die absoluten Werte der Differenzen. Es schadet auch nichts, wenn in einigen Zonen die eine, in einigen die andere Größe überwiegt, denn dadurch würde ja die Gesamtdifferenz (wieder absolut genommen) nur noch kleiner als die Summe der absolut genommenen Einzeldifferenzen werden.

Nun ist 5. die Summe der Grundlinien der Ergänzungsrechtecke gleich der Differenz der ersten und letzten Ordinate:

$$_1E\,{}_2D + {}_2E\,{}_3D + {}_3E\,{}_4D = {}_4B\,{}_4D - {}_1B\,{}_1D = {}_1L\,{}_4D$$

[45]) Der 4. Eckpunkt ist wieder nicht bezeichnet. Leibniz nennt auch diese Rechtecke „Ergänzungsrechtecke", obwohl sie den beim Beweise der „gewöhnlichen Indivisibelnmethode" benutzten nicht ganz entsprechen.

[46]) Hierbei wird stillschweigend wieder Stetigkeit vorausgesetzt.

[47]) Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß die Kurve zwischen $_1D$ und $_2D$ monoton verläuft, also nicht dazwischen einmal über $_1D\,{}_1E$ oder $_2T\,{}_2D$ hinausgeht.

vorausgesetzt, daß die Ordinaten der Kurve monoton wachsen. (Falls sie monoton abnehmen, so müßte man die erste und letzte Ordinate vertauschen.) Diese Bedingung spricht Leibniz implizite dadurch aus, daß er sich hierbei auf Satz 3, Artikel 1 beruft, der von der „ordo naturalis", d. h. der monotonen Zahlenfolge handelt. Die Summe der Ergänzungsrechtecke selbst ist also gleich einem Teil der letzten Ordinate, multipliziert mit der gemeinsamen Höhe DE, falls die Abstände der benachbarten Ordinaten alle gleich sind. Sind sie aber ungleich, so multipliziert man mit der größten Höhe, also in Figur 3 speziell mit der letzten Höhe $_3D\,_3E$ oder $\psi\,_4D$. Jedenfalls ist dann die Summe der Ergänzungsrechtecke nicht größer als das Rechteck, dessen Grundlinie die (absolut genommene) Differenz der ersten und letzten Ordinate und dessen Höhe der größte Abstand benachbarter Ordinaten ist, also in Figur 3 $\leqq$ Rechteck $_1L\,_4D\,\psi$.

Dasselbe Rechteck bedeutet also 6. nach Artikel 4 auch den Höchstwert der Differenz zwischen der Treppenfläche und dem Gesamtvierseit $_1D\,_1B\,_4B\,_4D$. Nun kann man 7. die Abstände der Ordinaten (einschließlich des größten Abstandes $\psi\,_4D$) kleiner annehmen als irgend eine angegebene Größe, „da es in unserer Macht steht, die Punkte $_1D$ . . . $_4D$ irgendwie nahe und in beliebig großer Zahl zu nehmen (sumere utcunqve sibi propinqva et numero qvantolibet)". Wenn aber die größte Höhe $\psi\,_4D$ kleiner als eine angegebene Strecke $\varphi\,_4D$ genommen werden kann, so kann auch als Rechteck $_1L\,_4D\,\psi$ kleiner als irgend ein angegebenes Rechteck β HA $= {}_1L\,{}_4D\,\varphi$ gemacht werden. Also ist das Endergebnis, daß 8. die Differenz zwischen der Treppenfläche und dem gemischtlinigen Vierseit $_1D\,_1B\,_4B\,_4D$ kleiner als irgend eine gegebene Größe gemacht werden kann.

§ 10.

Damit ist nach unserer (und auch nach Leibnizens) Auffassung schon bewiesen, daß diese beiden Flächen in der „Grenze", wenn man die Abstände der Punkte $_1D\,_2D$ usw. unendlich klein werden läßt, genau den gleichen Flächeninhalt haben. Aber Leibniz hat sich ja vorgenommen, den Beweis mit antiker Strenge durchzuführen. Deshalb vermeidet er hier die Ausdrücke Grenze und Unendlichkeit und zeigt die Gleichheit in Satz 7 apagogisch oder indirekt, durch eine „deductio ad absurdum", ähnlich der in der griechischen Mathematik üblichen. Damit verbindet er aber gleich den analogen Beweis für die Möglichkeit der beliebigen Annäherung des gemischtlinigen Dreiseits $_1CA\,_4C$ (eines Sektors der ursprünglichen Kurve) durch die ihr einbeschriebene geradlinige Figur $_1CA\,_4C\,_3C\,_2C\,_1C$ und außerdem noch den Nachweis, daß dies letztere Polygon halb so groß wie die Treppenfläche der zugehörigen Resektenfigur ist. Das alles zusammengefaßt ergibt den Satz 7, der sich kurz so aussprechen läßt[48]):

[48]) Leibniz wiederholt in seiner Formulierung des Satzes 7 unnötigerweise die schon in Satz 6 ausgeführten Konstruktionsanweisungen.

Das gemischtlinige Vierseit, das von einem Stück der Resektenfigur, den beiden äußersten Ordinaten und der (Abszissen-) Achse gebildet wird, ist doppelt so groß wie das gemischtlinige Dreiseit, das von dem entsprechenden Stück der ursprünglichen Kurve und den beiden Verbindungslinien ihrer äußersten Punkte mit dem (Koordinaten-) Anfangspunkt gebildet wird.

Der Beweis besteht wieder aus mehreren Artikeln, die ich aber etwas anders als Leibniz anzuordnen vorziehe. Artikel 3. Aus Satz 1 folgt, daß das Elementarrechteck $_1N\,{}_1B\,{}_2B\,{}_1P$ doppelt so groß ist wie das Dreieck $_1CA\,{}_2C$. Das gleiche gilt für alle folgenden Zonen, also auch für die Summe aller. Also ist die Treppenfläche $_1N\,{}_1B\,{}_3B\,{}_2P\,{}_2N\,{}_1P\,{}_1N$ doppelt so groß wie das Vieleck $_1CA\,{}_3C\,{}_2C\,{}_1C$[49]).

Artikel 2. Nach Satz 6 kann man die Punkte $_1C\,{}_2C\,{}_3C$ so dicht und zahlreich annehmen, daß die Differenz zwischen der Treppenfläche und dem zugehörigen Vierseit der Resektenfigur kleiner als irgend eine gegebene Größe ist. Nach einem Beweise des Archimedes, den Leibniz hier nicht zu wiederholen für nötig hält, kann man eben dadurch auch die Differenz zwischen dem der ursprünglichen Kurve einbeschriebenen Vieleck und dem zugehörigen Sektor kleiner als irgend eine gegebene Größe machen.

Artikel 1. Angenommen nun, die Behauptung des Satzes 7 wäre falsch und es bestünde zwischen dem Vierseit der Resektenfigur und dem doppelten Dreiseit der ursprünglichen Kurve die Differenz Z. Dann setzen wir die Verkleinerung der Entfernung der Punkte $_1C\,{}_2C$ usw. so weit fort, bis jede der beiden in Artikel 2 genannten Differenzen kleiner als $\frac{Z}{4}$ ist.

Artikel 4. Bezeichnen wir nun das Vierseit der Resektenfigur $_1D\,{}_1B\,{}_3B\,{}_3D$ mit Q (Qvadrilineum), den Sektor der ursprünglichen Kurve $_1CA\,{}_3C\,{}_2C\,{}_1C$ mit T (Trilineum) und das ihm einbeschriebene Vieleck mit P (Polygonum), dann ist nach Artikel 3 die Treppenfläche $_1N\,{}_1B\,{}_3B\,{}_2P\,{}_2N\,{}_1P\,{}_1N = 2 \times P$, also nach Artikel 2: $|Q - 2 \times P| < \frac{Z}{4}$ und $|2 \times P - 2 \times T| = 2 \times |P - T| < \frac{Z}{2}$. Folglich ist nach Satz 5: $|Q - 2 \times T| < \frac{Z}{4} + \frac{Z}{2}$ oder $\frac{3}{4}Z$.

Artikel 5. Die Differenz zwischen dem Vierseit Q und dem doppelten Sektor 2 T „ist daher erst recht kleiner als Z, also kleiner als sie selbst, da ja die Differenz nach Annahme = Z ist. Das ist absurd. Also darf überhaupt keine Differenz angenommen werden, da Z ganz beliebig, unbegrenzt klein gedacht werden kann (indefinita intelligi possit), und folglich sind der doppelte Sektor und das einfache Vierseit gleich".

Ehe ich Sinn und Bedeutung dieses Beweises genauer erörtere, füge ich noch einen kurzen Bericht über den folgenden Satz 8 ein, der die Behauptung des Satzes 7 auf den Fall ausdehnt, wo der erste Punkt beider Kurven, $_1C$ und $_1D$, in den (Koordinaten-) Anfangspunkt A hineinfällt. Dann

[49]) Leibniz geht hier nur bis $_3B\,{}_3C$, während er bei Satz 6 bis $_4B\,{}_4C$ gegangen war.

wird der Sektor der ursprünglichen Kurve zum Segment A_3C_2CA und das Vierseit der Resektenfigur zum „rechtwinkligen Dreiseit (trilineum orthogonium)“[50]) der jetzt sogenannten „Segmentenfigur“ $A_3B_3D_2DA$. „Also ist dieses rechtwinklige Dreiseit doppelt so groß wie das Segment der erzeugten Figur.“

Der Beweis ergibt sich sofort daraus, daß der Satz 7 allgemein gilt, daß er insbesondere gültig bleibt, wie klein auch die Strecken A_1B, A_1C, A_1D, $_1B_1C$ sind, folglich auch, wenn sie unendlich klein werden oder $_1B$, $_1C$, $_1D$ mit A zusammenfallen. „Wenn aber jemand eine unendlich kleine Linie nicht ertragen kann, so werden wir ihn nichtsdestoweniger überzeugen.“ Wäre nämlich die Behauptung falsch, und bestünde zwischen dem Dreiseit und dem doppelten Segment eine Differenz $= Z$, so würden wir die Strecke A_1B so klein annehmen, daß das Rechteck A_1B_1C[51]) kleiner als $\frac{Z}{4}$. folglich erst recht das in ihm enthaltene kleine Segment A_1CA und das kleine Dreiseit A_1B_1DA kleiner als $\frac{Z}{4}$ sind. Das kleine Segment aber ist die Differenz des großen Segments A_3C_2CA und des Sektors $_1CA_3C_2C_1C$, und das kleine Dreiseit ist die Differenz des großen Dreiseits $A_3B_3D_2D_1DA$ und des Vierseits $_1D_1B_3B_3D_2D_1D$. Also folgt:

1. | gr. Segment — Sektor | $< \frac{Z}{4}$.
2. | gr. Dreiseit — Vierseit | $< \frac{Z}{4}$; also, da Vierseit $= 2 \times$ Sektor (nach Satz 7):
3. | gr. Dreiseit — $2 \times$ Sektor | $< \frac{Z}{4}$. Nach der 1. Ungleichung aber ist:
4. | $2 \times$ Sektor — $2 \times$ gr. Segment | $< \frac{Z}{4}$.

Nimmt man die 3. und 4. Ungleichung zusammen, so ist nach Satz 5 die Differenz:

| gr. Dreiseit — $2 \times$ gr. Segment | $< \frac{3}{4} Z$, während sie $= Z$ angenommen ist. „Das ist absurd. Also kann diese Differenz als nicht vorhanden (nulla) gesetzt werden, und folglich ist das große Dreiseit doppelt so groß wie das große Segment.“

§ 11.

Wie die den Sätzen 6, 7, 8 angehängten interessanten Scholien zeigen, ist sich Leibniz über den Sinn und Wert dieser Beweise vollkommen klar gewesen. Im Scholium zu Satz 6 sagt er, ihm liege zwar die ängstliche Kleinigkeitskrämerei derer fern, die bei jedem einzelnen Satze einen formgerechten Beweis nach der Art der Alten verlangten[52]); das sei fruchtlose Spiegelfechterei; dabei werde viel Zeit und Arbeit für heilig gehaltene

[50]) Dieser Terminus ist auch unter den Definitionen zum Satz 7 genauer erklärt. Leibniz hat ihn, wie er selbst sagt, von anderen übernommen; es ist die Übersetzung des Pascalschen „triligne rectangle“.

[51]) Die 4. Ecke hat Leibniz mit $_2T$ bezeichnet, was zwar in seiner speziellen Figur ungefähr stimmt, aber nicht allgemein gilt.

[52]) So im früheren Entwurfe A. (Anhang, Anm. 41.)

Formalitäten (caeremoniis) verschwendet, und das Wichtigste, der geistige Ursprung der Entdeckungen, bleibe im Dunkeln. Aber auch nach seiner Meinung sei es von Wert für die Geometrie, daß die Methoden und Prinzipien der Entdeckungen sowie einige wichtigere Sätze streng bewiesen würden.

Nur will Leibniz die hierbei aufgewandte Mühe durch vernünftige Organisation möglichst verringern. Er schlägt deshalb vor[53]), nach dem Vorbilde der Elemente Euklids auch die später geschaffenen Hilfsmittel geometrischer Entdeckungen, die Archimedische und die Indivisibelnmethode, in ein demonstratives System zu bringen. Wenn das dann einmal geschehen sei, so könnten sich fortan die Mathematiker einfach darauf stützen und „ohne Schaden für die Sicherheit freier schreiben", z. B. in der Sprache der Indivisibeln, wie das ja auch Galilei, Cavalieri, Guldin, Descartes, Wallis, de Sluse und manchmal sogar Huygens getan hätten.

Die ersten 8 Sätze sind nach Leibnizens Überzeugung ein schon recht weit reichender Anfang eines solchen universalen demonstrativen Systems der Infinitesimalgeometrie. Im Scholium zu Satz 8 sagt er im Rückblick auf das Vorhergehende: „Ich habe dies deshalb bis ins einzelne auseinandergesetzt, damit die Gelehrten erkennen, mit wie geringer Schwierigkeit das, was ihnen verdächtig scheint, streng bewiesen werden kann, und damit die Geometer in Zukunft, wenn eine ähnliche Schlußweise vorkommt, sich diese Einzelheiten ohne Gefahr sparen können."

Im Scholium zu Satz 7 aber weist er noch auf zwei besondere Vorzüge hin, die sein Demonstrationsverfahren vor früheren Beweisen auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie auszeichnen. Es ist 1. viel einheitlicher und einfacher, trotzdem aber 2. viel umfassender; es genügt also dem Universalitätsideal in beiden ihm wichtigen Hinsichten schon viel besser als alle anderen Verfahren, wenn auch immer noch nicht im höchstmöglichen Grade. In der ersten Hinsicht hebt Leibniz hervor, daß er nicht ein- und umbeschriebene Figuren nötig habe wie die Alten, sondern mit einer einzigen Art auskomme[54]), und ferner, daß er bei der deductio ad absurdum nicht zwei Beweise gebrauche (einen dafür, daß die eine Fläche nicht größer, und einen zweiten dafür, daß sie nicht kleiner als die andere sei), sondern ganz einfach zeige, daß keine Differenz zwischen ihnen bestehe, wodurch diese Dinge viel klarer und begreiflicher würden. Allerdings habe er sich immer noch eines indirekten Beweises bedienen müssen (wenn auch des denkbar einfachsten, natürlichsten und dem direkten

---

[53]) So im früheren Entwurfe A. (Anhang, Anm. 42.)

[54]) Bei der ursprünglichen Kurve benutzt er nur das einbeschriebene Vieleck, bei der Resektenkurve eine Treppenfläche, die zwischen der ein- und umbeschriebenen liegt.

Beweise nächststehenden), weil ihm kein anderer Weg zum vollkommenen Beweis von Quadraturen bekannt sei, ja man mit Grund befürchten müsse, daß ein anderer durch die „Natur der Dinge“ ausgeschlossen sei.

In der zweiten Hinsicht hebt Leibniz hervor, daß Satz 7 und 8 schon so universal, d. h. allgemein und umfassend sind, daß sie alle bisher bekannten Quadraturen der höheren Parabeln und Hyperbeln mit den Gleichungen $y^m = px^{\pm n}$ (wo m und n positive ganze Zahlen sind), ja darüber hinaus auch die arithmetische Quadratur des Kreises und der Ellipse in sich schließen, daß sie ferner außer für parallele auch für konvergente Ordinaten anwendbar sind, wodurch „ein ungeheures Feld neuer Entdeckungen eröffnet wird“, und daß sie endlich sogar für ganz beliebige, zufällig und gesetzlos gezogene Kurven passen. Sobald man irgendeine Kurve quadrieren kann, lassen sich mit diesen Sätzen unzählige andere aufweisen, die auch quadrierbar sind.

Diese Ausführungen Leibnizens zeigen, daß er damals überzeugt war, mit diesen Sätzen die völlig festen und sicheren Grundlagen eines allgemein gültigen Systems der Infinitesimalgeometrie geschaffen zu haben, das mit recht einfachen Mitteln ein sehr umfangreiches Gebiet einheitlich zusammenschloß. Allerdings war er sich auch klar, daß in beiden Hinsichten noch nicht das höchste Ideal erreicht war. Denn es ließen sich auf diese Weise wohl sehr viele, aber längst noch nicht alle Figuren wirklich quadrieren. Und hinsichtlich der Einfachheit hörten wir ja schon, daß Leibniz einen direkten Beweis dem hier gegebenen indirekten doch noch vorgezogen haben würde, wenn „die Natur der Dinge“ einen solchen zulassen würde. Nun ist sehr interessant, daß Leibniz in einer späteren Randbemerkung zum Scholium von Satz 7 hinzugefügt hat, ein direkter Beweis könne vielleicht doch gegeben werden, wenn auch nur durch „die Annahme erdachter Größen, nämlich unendlicher oder unendlich kleiner (qvantitatibus fictitiis, infinitis scilicet vel infinitè parvis assumtis)“. Diese Bemerkung ist im Hinblick auf die Sätze 11 und 20—23 später hinzugefügt; ich werde darüber also bei diesen Sätzen noch Genaueres zu sagen haben, möchte aber schon jetzt hervorheben, daß er dadurch bei der Grundlegung der Infinitesimalgeometrie der heute üblichen noch wesentlich näher gekommen ist als in den bisherigen Sätzen.

Doch zunächst muß ich noch etwas genauer nachprüfen, wie weit Leibnizens Überzeugung von der Einfachheit und Allgemeingültigkeit dieser Sätze und Beweise wirklich berechtigt ist. In der ersteren Hinsicht kann kein Zweifel sein, daß er den antiken Exhaustionsbeweis, ohne in der Strenge nachzulassen, wirklich sehr vereinfacht und verdeutlicht hat. Das Fundament seines Beweises ist bei ihm noch genau das gleiche wie bei Archimedes, nämlich das gewöhnlich nach diesem benannte, in Wahrheit aber schon von Eudoxus aufgestellte „Axiom des Messens“, nach dem ungleiche geometrische

Größen derselben Dimension immer eine so große Differenz besitzen, daß man durch Vervielfachung der Differenz irgend eine gegebene Größe derselben Dimension übertreffen kann. Größen, bei denen das nicht der Fall ist, gelten also als gleich. Daraus folgt der Euklidische Satz, daß, wenn man von der größeren von zwei in diesem Sinne ungleichen Größen die Hälfte oder mehr, vom Reste wieder die Hälfte oder mehr fortnimmt usw., schließlich eine Größe übrig bleibt, die kleiner als die kleinere gegebene ist. Auf dieser Grundlage führt Archimedes nun in folgender Weise den Exhaustionsbeweis, z. B. für den Flächeninhalt eines Parabelsegments. Wenn man von dem Parabelsegment das ihm einbeschriebene Dreieck mit der größten Höhe fortnimmt, von den Restsegmenten wieder die ihnen einbeschriebenen Dreiecke mit den größten Höhen und in dieser Weise fortfährt, so folgt aus dem Euklidischen Satze, daß man dadurch die Differenz zwischen dem Parabelsegment und der Summe der Dreiecke kleiner als jede gegebene Fläche machen kann. Nun ist aber die Summe der Dreiecke gleich dem ersten mal $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots)$. Hieraus würden wir ohne weiteres schließen, daß in der Grenze das Parabelsegment gleich dem ersten Dreieck, multipliziert mit der Summe der unendlichen Reihe, also mit $\frac{4}{3}$ ist; Archimedes dagegen verwendet den Grenzprozeß wohl als heuristisches Prinzip, erwähnt aber in seiner systematischen Darstellung nichts davon, sondern stellt die Behauptung wie aus der Pistole geschossen hin und beweist sie dann, um ganz im Endlichen bleiben zu können, indirekt, durch eine deductio ad absurdum: Wäre das Parabelsegment nicht gleich $\frac{1}{3}$ des zuerst einbeschriebenen Dreiecks, so wäre es entweder größer oder kleiner. Wäre es größer, so bestünde zwischen ihnen eine Differenz $= Z$. Dann könnte ich die Einbeschreibung von Dreiecken so weit fortsetzen, daß der Rest des Parabelsegmentes $< Z$ würde. Dann würde also die Summe dieser Dreiecke gleich dem Parabelsegment vermindert um weniger als Z sein, also größer als das Parabelsegment vermindert um Z, also größer als $\frac{1}{3}$ des ersten Dreiecks. Das aber ist unmöglich. Denn die Summe der endlichen Anzahl von Dreiecken ist gleich dem ersten multipliziert mit $1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{3} < \frac{4}{3}$. Nun folgt ein ähnlicher, nur noch etwas umständlicherer Beweis dafür, daß das Parabelsegment auch nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ des ersten Dreiecks sein kann. (In diesem Falle wird das auch mit Hilfe der einbeschriebenen Dreiecke gezeigt, in anderen Fällen werden dazu neue, unbeschriebene Figuren benutzt.) Da nun sowohl die Annahme des Größerseins wie des Kleinerseins auf einen Widerspruch führt, so bleibt nur übrig, die Gleichheit anzunehmen.

Vergleichen wir mit diesem Archimedischen Exhaustionsbeweis den Leibnizschen, so ergeben sich folgende Unterschiede. 1. Leibniz stellt weder durch Ein- und Umbeschreibungen noch sonst durch zwei getrennte

Beweise fest, daß die Annahme des Größer- oder Kleinerseins unmöglich ist, sondern er zeigt in einem einzigen Beweis, daß die Annahme einer Differenz auf einen Widerspruch führt. Er erreicht das dadurch, daß er in den Sätzen 2—5 mit dem absoluten Wert der Differenz rechnen lehrt.

2. Er begnügt sich nicht damit, aus der Annahme einer endlichen Differenz Z einen Widerspruch herzuleiten, sondern er fügt am Schlusse noch ausdrücklich hinzu, da man Z ganz beliebig, also auch unbegrenzt klein annehmen könne, so folge aus jenem Widerspruch, daß man überhaupt keine Differenz annehmen dürfe, d. h. daß volle Gleichheit bestehe. Das hatten die Griechen niemals gesagt, ja in manchen Fällen hatten sie auch nicht einmal stillschweigend eine Reihe unbegrenzt abnehmender Größen aufgestellt, sondern sich mit einem einzigen hinreichend kleinen, aber endlichen Z begnügt. Durch Leibnizens Änderung der Ausdrucksweise wird das, was nach unserer Auffassung das Wesentliche ist, erst deutlich hervorgehoben. Ja, im Grunde wird dadurch der Sinn des antiken Exhaustionsbeweises schon ganz modern umgedeutet. Die deductio ad absurdum wird zwar noch beibehalten, aber nur, um recht scharf hervorzuheben, daß die Differenz der beiden Größen durchaus nicht gleich irgend einer endlichen Größe angenommen werden darf; viel wichtiger aber ist der andere, direkte Teil des Beweises, in dem gezeigt wird, daß, da man jene Größe beliebig klein wählen kann, die Differenz = O oder die beiden Größen einander gleich gesetzt werden müssen. Leibniz meint genau dasselbe, was Simon Stevin in den „Beghinselen der Weeghconst" (Eléments de Statique, zuerst Leyden 1586), nachdem er von zwei Größen gezeigt hat, daß die eine sich der anderen „unbegrenzt nähert, derart daß die Differenz kleiner ist als irgend eine gegebene Größe, wie klein sie auch sei", mit folgendem Syllogismus der scholastischen Form Baroco ausgedrückt hat: A. Wenn zwei Größen sich unterscheiden, kann man eine kleinere Größe als ihre Differenz finden. O. Für (A und B) kann man keine Größe finden, die kleiner als ihre Differenz ist. O. Also unterscheiden (A und B) sich nicht." Der Mathematikhistoriker H. Bosmans hat mit Recht darauf hingewiesen, daß dies der erste Versuch sei, in der Infinitesimalrechnung strenge Beweise in moderner direkter, statt antiker indirekter Form zu geben[55]). Dasselbe Schlußverfahren aber, das Stevin in der Statik anwendet, benutzt Leibniz in der Infinitesimalgeometrie. Es ist also trotz des Festhaltens an der Form der griechischen deductio ad absurdum doch sachlich in Wahrheit schon ein moderner direkter Beweis auf Grund einer Grenzbetrachtung.

---

[55]) H. Bosmans, De quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin, Annales de la Société Scientifiques de Bruxelles, Tom. 37,2, p. 171—199; Löwen 1913; derselbe, Le calcul infinitésimal chez Simon Stevin, Mathesis, Tome 37, p. 55—58, Bruxelles 1923.

3. Der Leibnizsche Beweis bezieht sich nicht auf die Quadratur einer bestimmten Kurve, sondern gilt (mit gewissen Einschränkungen) für beliebige Kurven. Während die Griechen für jeden besonderen Fall einen besonderen Exhaustionsbeweis führen mußten, ist der Leibnizsche so allgemein formuliert, daß man ihn auf die verschiedensten Fälle sofort übertragen kann. Ja, es ist nicht nur ein allgemeines Verfahren, um den Beweis einer irgendwie sonst entdeckten Quadratur zu führen, sondern auch um die Quadratur selbst zu finden. Es ist eine universale Erfindungs- und Beweismethode auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie.

§ 12.

Leibniz ist also mit seiner Überzeugung im Rechte, daß er in den Sätzen 1—8 dieses Gebiet, ohne auf die griechische Strenge zu verzichten, doch außerordentlich vereinfacht und die früheren Einzelleistungen zu einem einheitlichen System zusammengefaßt hat. Aber wie weit reicht nun die Anwendbarkeit dieses Systems? Denn daß es noch nicht allumfassend ist, darüber ist Leibniz selbst nicht im Unklaren. Zunächst beschränkt es sich auf Quadraturen, also nur auf die planimetrische Anwendung der späteren Integralrechnung, während Probleme der späteren Differentialrechnung, wie z. B. das Tangentenproblem, nicht behandelt werden. Und obwohl Leibniz in dieser Zeit schon längst erkannt hatte, daß diese beiden Problemklassen invers zueinander seien, bedient er sich hier nicht des einfachsten Integrationsverfahrens durch Umkehrung der Differentiation, sondern er definiert, modern gesprochen, nur das bestimmte Integral direkt als Grenzwert einer Summe, und zwar im geometrischen Bilde einer Treppenfläche mit unbegrenzt schmäler werdenden Stufen. Die wirkliche Durchführung der infinitesimalen Summation durch unmittelbare Bestimmung dieses Grenzwertes gelingt natürlich nur in wenigen Fällen; aber durch sein Verfahren der Transformation, d. h. der Einführung von neuen Integrationsvariablen, bringt er es doch bei allen früher gelösten Quadraturproblemen auch mit seiner Methode zustande[56]), die gegenüber den durch die Invidisibelntheorie gewonnenen Resultaten den Vorzug hat, mit antiker Strenge bewiesen zu sein.

Leibniz leistet aber noch viel mehr. Auch in den Fällen, wo er die

---

[56]) Vgl. z. B. den Satz 18, nach dem für alle höheren Parabeln und Hyperbeln, $y^m = px^{\pm n}$, die bestimmten Integrale $\int y\,dx : \int x\,dy$ zwischen den entsprechenden Grenzen sich wie $m : \pm n$ verhalten. Daraus folgt z. B. für die gewöhnliche Parabel $y^2 = x$ ohne weiteres, daß sie das Rechteck, das von den Koordinatenachsen und den beiden Senkrechten von einem Parabelpunkte auf die Achsen gebildet wird, im Verhältnis 2 : 1 teilt. Die eine Teilfläche ist also $\frac{2}{3}$, die andere $\frac{1}{3}$ von x.y oder von $x\sqrt{x}$, d. h. : $\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

infinitesimale Summation nicht vollständig ausführen kann, ist er wenigstens imstande, sie mit beliebiger Annäherung auszuführen und sogar die Existenz des Grenzwertes und damit des bestimmten Integrals zu beweisen. Allerdings umfaßt sein Beweis noch nicht alle Fälle, in denen tatsächlich ein Integral existiert. Aber das wichtigste ist, daß er die Forderung eines strengen Beweises für die Existenz des Grenzwertes aufstellt, und es schadet durchaus nichts, daß er dabei zunächst sogar zu streng ist und Fälle ausschließt, die er ruhig mit hätte umfassen können.

Stellen wir einmal die Voraussetzungen zusammen, die Leibniz für die Kurven macht, von denen er die Integrierbarkeit beweist. Zunächst fordert er als selbstverständlich ihre Stetigkeit, ohne es besonders zu sagen; später hat er die Kontinuität, wie wir sehen werden, ausdrücklich als Grundvoraussetzung seiner ganzen Infinitesimalrechnung erklärt. Aber er schränkt den Geltungsbereich in der Schlußbemerkung von Satz 6 noch mehr ein, wie ich damals schon erwähnt habe. In den verschiedenen Fassungen dieser Stelle im früheren Entwurf A ist interessant zu verfolgen, wie Leibniz sich hierüber allmählich klar geworden ist. Zunächst fordert er, daß die einzelnen Abschnitte der Kurve $_1C\,_2C$, $_2C\,_3C$ usw. „entweder ganz aufsteigen oder ganz absteigend sind, nicht aber teils aufsteigend, teils absteigend, was sich dadurch erreichen läßt, daß man alle etwa vorhandenen Reversionspunkte in die Punkte C legt." Das Aufsteigen und Absteigen ist ganz anschaulich nach der Lage in der Figur gemeint; in der zweiten Fassung ist genauer erklärt: „ich nenne die Kurve aufsteigend, wenn sie in der Richtung nach AT fortschreitet, absteigend, wenn nach $_3B\,_3C$" (richtiger nach $_4B\,_4C\,_4D$ oder noch besser $\mu\,\lambda$; die letzte Ordinate ist gemeint), und als Beispiel wird das Kurvenstück $_3D\,_4D\,_5D$ . . genannt, das abwechselnd ab- und aufsteigt. Was Leibniz mit den „Reversionspunkten" ausschließen will, ist also, daß zu einer Abszisse zwei oder mehr verschiedene Ordinaten gehören, oder wie er selbst es in der letzten Fassung ausdrückt, „daß verschiedene Ordinaten derselben Kurve, z. B. HS und $H\,_5D$, unter sich wenigstens teilweise zusammenfallen", mit einem Worte: er fordert ein deutige Funktionen. Beiläufig erwähnt er auch, daß die Eindeutigkeit in Bezug auf die verschiedenen Achsen auseinander gehalten werden muß, daß also ein störender Reversionspunkt unter Umständen einfach ausgeschaltet werden kann, indem man die Variabeln vertauscht. In der letzten Fassung werden die Reversionspunkte auch so definiert, daß in ihnen „die Ordinate zur (Abzissen-) Achse die Kurve berührt", womit außer der Mehrdeutigkeit auch der (im nächsten § erörterte) Grenzfall der Berührung im Unendlichen, der Asymptote, einbegriffen wird, während der Fall der Spitze garnicht erwähnt wird. Das beweist, daß Leibniz, ohne es besonders zu sagen, nicht nur für die Kurve selbst, sondern auch für den Tangens des Neigungswinkels die Endlichkeit und die stetige Änderung als selbstverständlich voraussetzt. Daß die Unendlichkeit und

Unstetigkeit des Differentialquotienten die Integrationsmöglichkeit durchaus nicht immer ausschließt, bemerkte er daher noch nicht.

Aber Leibniz geht sogar noch weiter in der Einschränkung und schließt auch noch verschiedene andere ausgezeichnete Punkte aus, nämlich alle „Wendepunkte (puncta flexuum)“ im weitesten Sinne, in denen die Ordinate oder Tangentenrichtung ihren Änderungssinn irgendwie „wendet“ oder wechselt. Besonders hebt Leibniz dabei die Wendepunkte im heutigen Sinne (puncta flexuum contrariorum) hervor, wo die Kurve ihre hohle Seite erst der einen, dann der anderen Achse zukehrt. Solche Punkte würden seinen Beweis stören, da dann $_1M$ nicht mehr zwischen $_1T$ und $_2T$ zu fallen braucht. Stillschweigend schließt er endlich auch, wie ich schon bei der Besprechung des Beweises von Satz 6 gezeigt habe, Maxima und Minima aus und verlangt monotones Wachsen oder Abnehmen, und zwar nicht nur innerhalb der einzelnen Abschnitte $_1D\,_2D$, $_2D\,_3D$ usw., sondern auch für das ganze betrachtete Stück $_1D\,_4D$.

Diese Überlegungen Leibnizens sind sehr interessant, weil es die ersten Versuche sind, die besonderen Bedingungen festzustellen, unter denen die Integration sicher ausführbar ist. Im Interesse der Strenge des Beweises ist Leibniz dabei zuerst sogar viel weiter gegangen, als nötig ist, indem er endlichen, stetigen und monotonen Verlauf für die Kurve und ihre Tangentenrichtung verlangt hat. Er hat dann allerdings gleich erkannt, daß es oft auch „ein Heilmittel für das Übel“ störender Punkte gibt, indem man nämlich „die ganze Kurve in so viel Abschnitte teilt“, wie störende Punkte vorhanden sind. Die Integration ist also nach Leibnizens Ansicht möglich, wenn die Kurve überall endlich ist und sich in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegen läßt, innerhalb deren ihre Ordinate und der Winkel ihrer Tangente stetig und monoton wachsen (oder abnehmen). Und diesen Satz hat er tatsächlich streng bewiesen.

Bei der weiteren Arbeit an der Abhandlung hat Leibniz jedoch erkannt, daß die Integration sogar noch in einigen Fällen ausführbar ist, deren Ausschluß ihm anfangs als ganz selbstverständlich erschienen war, insbesondere wenn die Kurve eine unendlich große Ordinate hat, aber sich an dieser Stelle ihrer Asymptote hinreichend dicht anschmiegt. Hiermit müssen wir uns im folgenden Kapitel noch genauer beschäftigen, da diese Erkenntnis von großer Bedeutung für die Ausreifung der Ansichten Leibnizens über das Wesen des Unendlichen und die Ausbildung neuer Methoden in der Infinitesimalmathematik geworden ist.

Anhang[1])

((De Qvadratura Arithmetica

CIRCULI ELLIPSEOS ET HYPERBOLÆ

cuius Corollarium est

TRIGONOMETRIA SINE TABULIS

Autore G. G. L. L.))[2]).

((Index notabiliorum:[3])

prop. 1. est lemma, cùius ope triangula ex [eodem] puncto ((fixo A)) incipientia transmutantur in [totidem] rectangula ((MNF)) rectæ ((AMN)) per punctum fixum — (?) transeunti normaliter applicata. fig. 1. 2.

prop. 2. 3. 4. 5. sunt lemmata valde generalia circa differentiam qvatenus ab excessu et defectu animo abstrahitur; et serviunt ad demonstrationes qvadraturarum apagogicas per sola inscripta.[4])

prop. 6. est spinosissima in qva morosè demonstratur certa qvædam spatia rectilinea gradiformia itemqve polygona eousqve continuari posse, ut inter se ((vel à curvis)) differant qvantitate minore qvavis data, qvod ab aliis plerumqve assumi solet. præteriri initio eius lectio potest, servit tamen ad fundamenta totius Methodi indivisibilium firmissimè jacienda.

prop. 7. fructum continet omnium præcedentium, et [apagogicè demonstrat] ostendit, qvomodo figuræ curvilineæ possint resolvi in triangula et qvomodo si his triangulis æqvalia exhibeantur rectangula, sector alterius figuræ in qvadrilineum[5]) alterius figuræ transformari possit.))

Propositio Prima.

„Si per trianguli ((ABC)) tres angulos totidem transeant rectæ parallelæ „interminatæ ((AD. BE. CF)), triangulum erit dimidium rectanguli, sub[6]) „((CE)) intervallo duarum parallelarum ((BE. CF)), et ((sub AG)) portione

[1]) Erstveröffentlichung einiger Abschnitte aus der eigenhändigen Leibniz-Handschrift der vormals Königlichen Bibliothek in Hannover: XXXV (Mathematik), Vol. II, 1, Blatt 7—38 = Cat. crit. Nr. 1233 E u. F, im folgenden mit B abgekürzt. Der Abdruck ist im allgemeinen buchstabengetreu. Nur die Verwendung der Akzente und Satzzeichen ist etwas gleichmäßiger gestaltet. Sonstige Abweichungen von der Handschrift sind in den Anmerkungen immer unter B aufgeführt. A bedeutet den früheren Entwurf, ebenda Blatt 144—159 = Cat. crit. Nr. 1233 C, dessen wesentliche Abweichungen von B meist auch in den Anmerkungen aufgeführt sind. C bedeutet den späteren Auszug: Compendium Qvadraturæ Arithmeticæ, ebenda Blatt 39—42, gedruckt in den Math. Schr. V, S. 99—113. Ferner bedeutet: ( ) Klammerbemerkungen Leibnizens. [ ] von Leibniz Gestrichenes oder Geändertes. (( )) von Leibniz später (zwischen den Zeilen oder am Rande) Hinzugefügtes. — (?) ein unleserliches oder (z. B. am Rande) zerstörtes Wort.

[2]) A: Qvadraturæ Circuli Arithmeticæ Propositio Prima.

[3]) Der Index fehlt in A und ist in B nachträglich am Rande der ersten Seite hinzugefügt.

[4]) B: inscripta, [ut]

[5]) B: Schreibfehler trilineum.

[6]) comprehensi sub ...

„tertiæ ((AD)), intercepta inter[7]) puncta, qvibus eo angulo trianguli ((A)), „et opposito lateri ((BC)), si opus est producto, occurrit.

((8) In BC productam agatur normalis AH, erunt triangula AHG. CEB similia, ergo ut AH ad AG ita CE ad CB. ac proinde rectangulum AG in CE æqvale rectangulo AH in CB seu duplo Triangulo ABC. Itaqve Triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit. Qvod asserebatur.))

Scholium.

Cùm infinitis modis in eodem triangulo et parallelæ duci, et intervalla eligi possint, patet omnia rectangula huiusmodi, (cùm uni eidémqve triangulo duplo æqventur) etiam fore æqvalia inter se; ut rectangula CD in LB, CE in AG, Ce in A γ; si idem in fig. 1. et 2. ponatur esse triangulum ABC.

Porro Propositio, qvam hîc demonstravimus, Lemma est, facile utiqve, et in proclivi positum, sed qvod usus tamen habet latè patentes: qvoniam enim rectanguli et trianguli naturas in unum conjungit, utiqve foecundius esse debet, qvàm si non nisi alterutram contineret. Ejus enim auxilio figuræ curvilineæ etiam in triangula utiliter resolvuntur, cùm Cavalerius aliíqve doctissimi viri eas in parallelogramma tantùm partiri soleant, generalem certè in triangula resolutionem, qvod sciam, non adhibuerint. Sed hæc clarius ex prop. 7. patebunt[9]).

Propositio II.

„Series differentiarum inter qvantitates ordine perturbato dispositas, „major est serie differentiarum inter qvantitates easdem ordine naturali aut „minus perturbato collocatas.

Ordinem naturalem voco, cùm proceditur à minori ad majus tantùm, vel à majori ad minus tantùm: Perturbatum cùm modò ascenditur à minori ad majus, modò descenditur à majori ad minus.

Sint ordine naturali dispositæ

Qvantitates	A	A + B	A + B + C
Differentiæ	B	C	

Summa differentiarum, seu tota differentiarum series est

B + C.

Sint rursus ordine perturbato dispositæ[10])

Qvantitates	A + B	A	A + B + C
Differentiæ	B	B + C	

[7]) C: inter occursus ejus cum angulo trianguli et lateri opposito, si opus, producto.

[8]) In B am Rande hinzugefügt als Ersatz für einen früheren, ausführlicheren Beweis, in dem genauer gezeigt wird, daß AD und CB sich schneiden müssen und daß die Dreiecke AHG und CEB ähnlich sind.

[9]) In A und B folgt hier noch ein später gestrichener Absatz, in dem die Anwendbarkeit dieses Lemmas z. B. zur Addition der Flächeninhalte gewisser Dreiecke gezeigt wird.

[10]) Iidem termini ordine perturbato dispositi

Summa seu series harum differentiarum, 2 B + C major utiqve qvàm B + C series prior. Idémqve in serie longiore sæpius perturbata, sæpius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in ordine perturbato major qvàm in naturali, aut minùs, sive rariùs, perturbato. Qvod asserebatur.

Propositio III.

„In serie qvotcunqve qvantitatum, differentia extremarum non potest „esse major ((qvàm)) summa differentiarum intermediarum sive continuarum.

Sint Qvantitates A B C D E — A E
Differentiæ f g h l — m

Differentiæ scilicet continuæ inter A et B, B et C, C et D, etc. sint f. g. h. etc. At Differentia extremarum A et E, sit m. Ajo m non esse majorem qvàm f + g + h + l.

(1) Nam termini sive qvantitates A. B. C. D. E. vel ordine naturali collocantur, vel perturbato. Si naturali, tunc constat m esse æqvalem summæ f + g + h + l. Nam si alterutra extremarum, ut A, posita sit minima, altera, ut E, maxima, tunc erit

series A B C D E
eadem isti A A + f A + f + g A + f + g + h A + f + g + h + l.

et differentia inter A et E, nempe m, erit f + g + h + l. Eodem[11]) modo licet ratiocinari si E sit minor qvàm D, et D minor qvàm C, etc. tantùm enim seriem invertere, sive literas capitales mutare opus est. Utroqve ergo casu in ordine naturali, m, differentia inter A et E terminos maximum et minimum idem valebit qvod f + g + h + l, summa differentiarum intermediarum sive continuarum; non est ergo m major qvàm hæc summa[12]).

(2) At si ordo qvantitatum A. B. C. D. E. sit perturbatus, tunc major est series differentiarum, f + g + h + l, qvàm si esset naturalis, per prop. 2. major ergo qvàm differentia termini maximi et minimi, qvia ut ostendimus artic. 1. huius prop. ea differentia æqvatur seriei differentiarum ordinis naturalis.

(3) Qvoniam autem in casu situs perturbati summa differentiarum intermediarum, f + g + h + l, major est qvàm differentia terminorum duorum, qvi inter hos A. B. C. D. E. maximi et minimi sunt, per artic. 2. erit et major qvàm differentia duorum aliorum (qvippe minùs differentium, qvàm maximus et minimus), ergo generaliter erit major qvàm differentia duorum qvorumcunqve huius seriei terminorum, ergo et major qvàm

---

[11]) A: Idem esset si E esset ((minor)) qvam A. B: Eodem modo licet ratiocinari si E sit major qvàm A, et D major qvàm C, etc.

[12]) In A finden sich auch noch zwei frühere, später gestrichene Entwürfe des Artikels (1) von Satz III, darunter auch das folgende Corollarium: Si series decrescat in infinitum, terminus maximus æqvatur summæ differentiarum. Nam terminus minimus E est 0, ergo A—E est A.

differentia inter A et E, seu major qvàm m. Ergo m minor erit qvam f + g + h + l. Cùm ergo in casu ordinis naturalis m sit huic summæ æqvalis per artic. 1. in casu ordinis perturbati minor, ut hîc ostendimus; neutro ((casu)) major erit. Qvod ostendendum sumseramus.

Scholium.

Hæ duæ propositiones 2. et 3. generalius conceptæ sunt, qvàm necesse erat ad institutum nostrum, neqve enim ad propositiones seqventes opus habebam nisi casu trium qvantitatum: A. B. C. malui tamen generaliter potiùs enuntiare et demonstrare; præsertim[13]) cum usqve adeò universales sint, ut nullam omnino qvantitatum varietatem morentur.

Propositio IV.

„Differentia duarum qvantitatum non potest esse major ((qvàm)) summa „differentiarum tertiæ à singulis.

Nempe sint duæ qvantitates A. E. qvarum differentia f: sit alia C et differentia inter A et C sit b. inter E et C sit d. ajo f non posse excedere b + d. Reducantur in unam seriem:

Qvantitates	A	C	E	A	E
Differentiæ		b	d		f

Ergo per prop. præced. ipsa f differentia extremarum, non potest esse major qvàm summa differentiarum intermediarum seu continuarum, sive qvàm b + d. Qvod ostendendum erat.

Propositio V.

„Differentia duarum qvantitatum minor est qvàm summa duarum „aliarum qvantitatum, qvarum una unius, altera alterius priorum differentiam „à tertia excedit.

Schema ita stabit

Qvantitates	A	C	E	Ergo ipsarum	A	E
Differentiæ veræ		b	d	differentia vera		f
minores qvàm		g	h	minor qvàm		g + h

Nimirum ajo f differentiam qvantitatum duarum A. E. minorem esse qvàm g + h, summam duarum aliarum qvantitatum g. h. si g excedat b, differentiam ipsius A à tertia C, et h excedat d, differentiam ipsius E ab eadem tertia C. Nam g est major qvàm b, et h major qvàm d ex hypothesi, ergo g + h est major qvàm b + d, at f non est major qvàm b + d per prop. 4. Ergo f est minor qvàm g + h.

Scholium.

Has propositiones qvartam et qvintam, etsi valde claras attentè considerantì adjiciendas duxi tamen, tum qvod servient ad facilem admodum

[13]) A: [Mihi enim magni momenti videntur] ((præsertim cum eæ)) propositiones, [qvæ] usqve adeò [generales] ((universales)) sunt, ut . . .

per sola polygona inscripta sine circumscriptis demonstrationem apagogicam qva prop. 7. utar, tum qvod operæ pretium videatur ipsius per se differentiæ proprietates considerare, qvatenus ab excessu vel defectu animo abstrahitur; cùm scilicet non exprimitur qvænam ex differentibus qvantitatibus altera major minórve sit.

Propositio VI.

(Huius propositionis lectio omitti potest, si qvis[14]) in demonstranda prop. 7. summum rigorem non desideret. Ac [itaqve] satius erit eam præteriri ab initio, réqve tota intellecta tum demum legi, ne eius scrupulositas fatigatam immaturè mentem à reliqvis, longè amœnioribus, absterreat. Hoc unum enim tantùm conficit duo spatia, qvorum unum in alterum desinit si in infinitum inscribendo progrediare; etiam numero inscriptionum manente finito tantùm, ad differentiam assignata qvavis minorem sibi appropinqvare. Qvod plerumqve etiam illi sumere pro confesso solent, qvi severas demonstrationes afferre profitentur.)

Si à qvolibet curvæ cuiusdam propositæ, $_1C$ $_2C$ etc. $_4C$ (fig. 3.) puncto C ad unum anguli cuiusdam recti TAB, in eodem cum ipsa plano positi, latus A $_1B$ $_2B$ etc $_4B$ velut ad axem, ducantur ordinatæ normales CB, ad alterum latus A $_1T$ $_2T$ etc $_4T$ tangentes CT et ex punctis occursus tangentium, T, agantur perpendiculares TD ad ordinatas respondentes et curva nova $_1D$ $_2D$ etc $_4D$ per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat. Rursus si qvælibet in curva priore designata puncta proxima, ut $_1C$ et $_2C$, vel etc. vel $_3C$ et $_4C$, aliáve qvotcunqve inter hæc prima et ultima paria interjecta, rectis inscriptis sive chordis $_1C$ $_2C$ etc. usqve ad $_3C$ $_4C$ jungantur, qvæ productæ CM eidem, cui tangentes, Anguli illius recti TAB lateri AT occurrant in punctis M, qvæ cadunt intra puncta T, ut $_1M$ inter $_1T$ et $_2T$, et $_3M$ inter $_3T$ et $_4T$, et ex his occursuum punctis M similiter perpendiculares $_1M$ $_1N$ $_1P$ aliæqve usqve ad $_3M$ $_3N$ $_3P$[15]) demittantur, qvarum una qvælibet duorum punctorum ad M pertinentium ordinatis occurrat, ut $_1M$ $_1N$ $_1P$ (cuius punctum $_1M$ pertinet ad puncta curvæ $_1C$. $_2C$.) occurrere debet ordinatæ $_1C_1B$ in puncto $_1N$, et ordinatæ $_2C_2B$ in puncto $_1P$, idémqve in cæteris fieri debet; unde hæ perpendiculares ab ordinatis abscindent portiones qvasdam inde ab axe sumtas, ut $_1N$ $_1B$ aliáve usqve ad $_3B$ $_3N$.

„His ita præscriptis ac præparatis, ajo in curvis puncta C inter „$_1C$ et $_4C$ et puncta D inter $_1D$ et $_4D$ tam sibi vicina tantoqve

---

[14]) A: si qvis methodo indivisibilium contentus, in demonstranda ... desideret. Der Rest der Vorbemerkung fehlt in A.

[15]) Der Schluß des Absatzes von hier an lautet in A: ad duorum punctorum $_1C$ et $_2C$ etc., vel $_3C$ et $_4C$ etc., per qvæ transierant chordæ inscriptæ, ordinatas, nempe ad $_1C$ $_1N$ $_1B$, $_2C$ $_1P$ $_2B$ etc. vel ad $_3C$ $_3N$ $_3B$, $_4C$ $_3P$ $_4B$ demittantur, qvæ ab ipsis, inde ab axe, portiones qvasdam $_1B$ $_1N$ etc. $_3B$ $_3N$ resecent.

„numero assumta intelligi posse, ut spatium recti-
„lineum gradiforme $_1N\,_1B\,_4B\,_3P\,_3N\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$, compositum ex
„rectangulis $_1N\,_1B\,_2B\,_1P$ aliisqve usqve ad $_3N\,_3B\,_4B\,_3P$, qvæ sub ordinatarum
„si opus est productarum rescissis portionibus $_1B\,_1N$ aliísve usqve ad
„$_3B\,_3N$, et sub intervallis $_1B\,_2B$ aliisve usqve ad $_3B\,_4B$ comprehenduntur; a b
„ipso spatio Qvadrilineo $_1D\,_1B\,_4B\,_4D\,_3D$ etc $_1D$ (axe $_1B\,_4B$, ordinatis
„extremis $_1B\,_1D$, $_4B\,_4D$ et curva nova $_1D\,_2D$ etc $_4D$ comprehenso) differat
„qvantitate minore qvavis data. Et eadem demonstratio
„locum habet in qvovis alio spatio mixtilineo et gradi-
„formi, continua rectarum ad qvendam axem applicatione formato[16]).
„Adeoqve methodus indivisibilium, qvæ per summas
„linearum invenit areas spatiorum, pro demonstrata
„haberi potest. Reqviritur autem[17]) Curvas aut saltem
„partes, in qvas sunt sectæ, esse ad easdem partes cavas,
„et carere punctis reversionum.

Definitio[20]).

Puncta Reversionum voco, in qvibus coincidunt ordinata et tangens, seu ex qvibus ordinata ad axem ducta curvam tangit: talia sunt, in

---

[16]) A u. B: formatis.

[17]) In A finden sich mehrere verschiedene Fassungen des Schlusses der Propositio VI. Die 1. Fassung lautet so: Ponantur ita assumi puncta C ut portiones curvæ $[_1C\,_2C\,_3C]$ inter duo qvælibet puncta vicina interceptæ sint singulæ aut totæ ascendentes, aut totæ descendentes, non verò partim ascendentes, partim descendentes: qvod obtineri poterit, si in punctorum C assumtorum sint omnia puncta reversionum, si qva sunt. In der 2. Fassung ist zu „puncta C" hinzugefügt: „et per conseqvens et puncta D." Ferner ist genauer erklärt: „Ascendere eam voco, cum versus rectam AT procedit, descendere cum ad rectam $_3B\,_3C$[18]), qvemadmodum facit curva $_3D\,_4D\,_5D$, qvæ descendit[19]) à $_3D$ usqve ad $_4D$, ascendit[19a]) verò rursus à $_4D$ usqve ad $_5D$, cùm contra curva $_1DF\,_2D$ descendat tantùm ab $_1D$ per F ad $_2D$." Endlich ist am Schluss hinzugesetzt: „Vel etiam assumatur ea tantùm curvæ portio, $_1D\,_2D\,_3D$, qvæ careat punctis reversionum; qvod obtinebitur, si curva dividatur in portiones per ipsa puncta reversionum." Die 3. Fassung lautet: „Reqviritur autem ut curvæ $_1C\,_2C$ etc $_4C$ et $_1D\,_2D$ etc $_4D$ aut saltem earum hæ, qvas dixi, partes, [careant punctis reversionum inter extrema puncta interjectis] punctis flexuum careant; qvod fiet, si ipsa puncta flexuum sint inter puncta divisionum; puncta autem flexuum voco non tantùm qvibus ex concava fit convexa, sed et puncta reversionum, qvibus curva antea descendens mox incipit rursus ascendere." Dies ist durch Streichen und Überschreiben in die 4. Fassung geändert; „Reqviritur, autem, ut curvæ $_1C\,_2C$ etc $_4C$ et $_1D\,_2D$ etc $_4D$ aut saltem earum hæ, qvas dixi, portiones sint ad easdem partes cavæ, et punctis reversionum careant."

[18]) muß heißen: $_4B\,_4C\,_4D$ oder noch besser $\mu\,\lambda$.

[19]) fälschlich in „ascendit" umgeändert.

[19a]) fälschlich in „descendit" umgeändert.

[20]) In A ist die Definitio gestrichen, aber wiederhergestellt. („Haec restituenda.")

curva $_1D\ _2D$ etc $_4D\ _5D\ _6D$, puncta $_4D.\ _5D.\ _6D$. qvia in illis curva cùm antea descenderet ab A versus $_4B$, nunc rursus ascendit versus A vel contra. Quæ differunt à punctis flexuum contrariorum, qvale est R, in qvo tantum curva ex concava fit convexa, et contra[21]) ((atqve ita non est ad easdem partes cava.)) Porro Puncta Reversionum in areis spatiorum per summas rectarum ordinatarum inveniendis ideò nocent; qvia ita fit, ut diversæ ordinatæ ejusdem curvæ, ut HS, $H\ _5D$, inter se, saltem ex parte, coincidant[22]). Huic malo remedium est, ut tota curva in tot dividatur portiones, qvot habet puncta reversionum, hoc pacto singulæ portiones, ut $_1D\ _2D$ etc $_4D$, et $_4D\ _5D$, et $_5D\ _6D$, nulla habebunt reversionum puncta inter extrema sua interjecta; et in singulis locum habebit nostra propositio. Cæterum, ut obiter dicam, ex his patet curvam eandem habere aut non habere puncta reversionum prout ad diversos axes refertur: qvod secus est in punctis flexuum contrariorum.

Demonstratio propositionis VI.

(1) Punctum $_1M$ positum est inter puncta $_1T.\ _2T.$ ex constructione. Ergo et recta $_1M\ _1N\ _1P$ cadit inter rectas $_1T\ _1D$, $_2T\ _2D$, seu recta $_1N\ P$ ad parallela $_1B\ _1N$ ad parallelam $_2B\ _2D$ perveniens cadet intra duo puncta in his diversis parallelis posita, $_1D.\ _2D.$ ita ut à puncto $_1D$ ad punctum $_2D$ nulla possit duci linea, recta vel curva, qvin vel rectam $_1N\ _1P$ secet alicubi in F, vel supra infráve duas parallelas $_1B\ _1N$, $_2B\ _2D$ evagetur, adeoqve modò ascendat, modò descendat, ut curva $_1DQ\ _2D$, descendens ab $_1D$ ad Q et rursus ascendens à Q ad $_2D$, vel curva $_1DK\ _2D$, ascendens ab $_1D$ ad K, et descendens à K ad $_2D$; qvæ adeò habebit puncta reversionum[23]), Q vel K. Sed talia puncta[24]) non habet curva aut eius portio $_1D\ _2D$ ex hypothesi; ergo rectam $_1N\ _1P$ secabit in $_1F$. Eodem modo alia portio $_2D\ _3D$ rectam $_2N\ _2P$ secabit in $_2F$ etc.

(2) Producta jam intelligatur $_1T\ _1D$, dum ordinatæ seqventi $_2B\ _2C$[25]) occurrat in $_1E$, eodem modo $_2T\ _2D\ _2E$ ordinatæ seqventi $_3B\ _2E\ _3C$ occurrat in $_2E$. His positis ajo primum ipso rectangulo qvod vocabo complementale $_1D\ _1E\ _2D$ minorem esse differentiam inter ((unum)) Qvadrilineum partiale $_1D\ _1B\ _2B\ _2D\ _1D$ et ((inter)) unum rectangulum ei respondens $_1N\ _1B\ _2B\ _1P$, qvod qvia cum cæteris similibus spatium gradiforme ((componit)), vocabo Rectangulum Elementare, qvibus vocabulis tantùm in huius propositionis demonstratione utar, ut com-

[21]) Fortsetzung in A: qvæ (([huic theoremati] aliqvando)) non obstant; puncta autem reversionum ideò nocent, qvia usw. wie in B.

[22]) Fortsetzung in A: adeoqve per summam ordinatarum summa spatii iniri non possit; huic malo usw. wie in B.

[23]) A: flexuum.

[24]) A: puncta flexuum.

[25]) A: $_2B\ _1E\ _2C$.

pendiosius loqvi liceat. Assertum ita probo: ab utroqve differentium, Qvadrilineo partiali et rectangulo elementari, auferatur qvod utriqve commune est, scilicet (qvoniam per art. 1. aliqvod intelligi potest punctum $_1$F) Quinqvelineum $_1$D $_1$B $_2$B $_1$P $_1$F $_1$D, qvatuor rectis $_1$D $_1$B, et $_1$B $_2$B, et $_2$B $_1$P et $_1$P $_1$F, ac curva $_1$F $_1$D comprehensum: tunc residuorum, trilinei $_2$D $_1$P $_1$F $_2$D ex qvadrilineo partiali; et trilinei $_1$D $_1$N $_1$F $_1$D ex rectangulo elementari ((remanentium)), eadem utiqve differentia erit, qvæ ipsorum totorum differentium, Qvadrilinei partialis, et rectanguli elementaris. Generaliter enim ea est differentia residuorum, qvæ totorum ex qvibus sublata est qvantitas communis.

(3) Suffecerit ergo ostendi differentiam horum duorum trilineorum minorem esse rectangulo complementali $_1$D $_1$E $_2$D, qvod patet qvia utrumqve simul, distinctè, trilineum scilicet $_1$D $_1$N $_1$F $_1$D et trilin. $_2$D $_1$P $_1$F $_2$D, adeoqve et summa eorum, intra rectangulum hoc complementale cadit: majus est ergo rectangulum complementale qvàm eorum summa, ergo et majus qvàm eorum differentia; qvare et majus qvàm id qvod per artic. 2. cum ea coincidit, differentia scilicet inter Qvadrilineum partiale, et rectangulum ei respondens Elementare, qvod primum probare susceperam.

(4) Eodem modo ut in artic. 3. probabitur Qvadrilinei partialis seqventis $_2$D $_2$B $_3$B $_3$D $_2$D et rectanguli ei respondentis elementaris $_2$N $_2$B $_3$B differentiam minorem esse rectangulo seqventi complementali $_2$D $_2$E $_3$D, et ita si alia qvotcunqve seqvantur vel interjiciantur. Itaqve generaliter summa omnium differentiarum partialium, vel qvod idem est differentia totorum, id est differentia summæ Qvadrilineorum partialium omnium, seu Qvadrilinei totalis $_1$D $_1$B $_4$B $_4$D $_3$D etc $_1$D à summa omnium ejusmodi rectangulorum elementalium, seu à spatio rectilineo gradiformi $_1$N $_1$B $_4$B $_3$P $_3$N $_2$P $_2$N $_1$P $_1$N minor erit qvàm summa omnium rectangulorum complementalium $_1$D $_1$E $_2$D, aliorumve similium usqve ad $_3$D $_3$E $_4$D.

(5) Hæc rectangula qvæ complementalia vocavi, bases habent, $_4$D $_3$E, vel $_3$D $_2$E (id est $_3$E $_2$L); aliasve, usqve ad $_2$D $_1$E (id est $_2$L $_1$L). Summa autem harum basium æqvatur ipsi $_4$D $_1$L[26]) (((per prop. 3. artic. 1.))) seu differentiæ inter $_1$B $_1$D (vel $_4$B $_1$L), et $_4$B $_4$D; inter primam scilicet et novissimam ordinatarum ad curvam $_1$D $_2$D $_3$D $_4$D[27]). Qvod eodem modo fieret, si qvotcunqve alia puncta ordinatæqve interjicerentur. Itaqve si jam ponamus horum rectangulorum complementalium $_1$D $_1$E $_2$D, $_2$D $_2$E $_3$D, aliorumqve, altitudines, $_1$D $_1$E (vel $_1$B $_2$B), et $_2$D $_2$E (vel $_2$B $_3$B) usqve ad $_3$D $_3$E (vel $_3$B $_4$B, vel ψ $_4$D), seu intervalla ordinatarum, æqvari inter se, utiqve summa omnium rectangulorum complementalium æqvalis erit rectangulo

[26]) A u. B fälschlich: $_3$DL.
[27]) A u. B: $_1$D $_2$D $_3$D.

$\psi_4 D_1 L$[28]) ex summa basium $_1L_4D$[28]) in altitudinem communem $\psi_4 D$[28]) (æqvalem ipsi $_3B_4B$, et $_2B_3B$) ((ducta:)) vel si inæqvales sint altitudines, utiqve summa rectangulorum complementalium minor erit rectangulo sub summa basium in maximam altitudinem: Ponatur ergo altitudinum harum maxima, vel certè cuiqve cæterarum æqvalis, esse ultima $_3B_4B$, utiqve summa horum rectangulorum complementalium minor erit vel certè æqvalis summæ basium, $_4D_1L$, ductæ in altitudinem maximam, $_3B_4B$ vel $\psi_4 D$, seu rectangulo $\psi_4 D_1 L$.

6) Qvoniam differentia Qvadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est summa rectangulorum complementalium per art. 4. et summa rectangulorum complementalium æqvalis est vel minor rectangulo $\psi_4 D_1 L$ per artic. 5. Ergo differentia Qvadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo $\psi_4 D_1 L$.

7) Porro hoc novissimarum ordinatarum, $_3B_3D$, $_4B_4D$, intervallum (nempe altitudo $_3B_4B$ sive $\psi_4 D$), tametsi cæteris majus, aut certè non minus sit assumtum intervallis, tamen assignata qvantitate minus assumi potest; nam ipso sumto utcunqve parvo cætera sumi possunt adhuc minora[29]). Posito ergo rectam[30]) $\psi_4 D$ assignata linea minorem sumi posse (qvoniam in nostra est postetate puncta $_3D$ $_4D$ aliáqve sumere utcunqva sibi propinqva et numero qvantolibet), seqvetur et rectangulum $\psi_4 D_1 L$, altitudinem habens qvæ data recta minor sumi possit, etiam data aliqva superficie reddi posse minus. Sit enim data superficies, rectangulum β HA, si placet, aliudve qvodcunqve: assumatur ei æqvale vel minus rectangulum $\varphi_4 D_1 L$, super basi $_4D_1L$. Jam hac recta $\varphi_4 D$ minor sumatur $\psi_4 D$, erit rectangulum $\psi_4 D_1 L$ minus rectangulo $\varphi_4 D_1 L$, adeoqve et spatio dato seu rectangulo β HA.

8) His jam positis[31]) demonstratio ita absolvetur: differentia Qvadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo $\psi_4 D_1 L$ per artic. 6. Et puncta in curva tam exiguo intervallo tantoqve numero assumi possunt, ut rectangulum $\psi_4 D_1 L$ sit dato spatio minus per artic. 7. Ergo eadem opera etiam Differentia huius Qvadrilinei (de qvo et Propositio loqvitur), et spatii gradiformis data qvantitate minor reddi potest. Q. E. D.

Hæc propositio prolixiore indiguit demonstratione, qvia non parum à communi indivisibilium methodo nostra in hoc qvidem casu differt[32]). Si verò, in casu alio à nostro, curva aliqva $_1N$ $_2N$ $_3N$ per ipsa spatii gradiformis puncta $_1N$ et $_2N$ et $_3N$ transiisset, ut in communi methodo indivisibilium, ubi

[28]) A fälschlich $_4B$ statt $_4D$. B: [$_4B$] (($_4D$))

[29]) Zusatz in A: Qvoniam intervallum earum pro arbitrio assumi potest, et nulla est linea tam parva, qvin assumi possit adhuc minor.

[30]) A: rectam $_3B_4B$ vel $\psi_4 D$.

[31]) A: ostensis demonstratio propositionis.

[32]) In A fehlt der 1. Satz, und der Absatz beginnt: Si ((in alio qvàm nostro casu)) curva ((aliqva $_1N$ $_2N$ $_3N$)) per ipsa usw. wie in B.

figuræ curvilineæ tantùm in parallelogramma resolvuntur, fieri solet; longè facilior fuisset demonstratio. Differentia enim spatii gradiformis $_1N\,_1B\,_3B\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$[33]) et mixtilinei $_1N\,_1B\,_3B\,_3N\,_2N\,_1N$, constaret exiguis trilineis $_1N\,_1P\,_2N\,_1N$, et $_2N\,_2P\,_3N\,_2N$, utiqve minoribus qvàm rectangula ipsis circumscripta, $_1N\,_1P\,_2N$, $_2N\,_2P\,_3N$, qvæ hîc etiam vocabo complementalia, ergo et differentia dicta minor erit ((qvàm)) summa horum rectangulorum complementalium, summa autem horum rectangulorum complementalium nunqvam major erit rectangulo ((facto)) ex summa basium, $_1P\,_2N$, $_2P\,_3N$[34]), (qvæ nunqvam major recta $_3B\,_3N$)[35]) ducta in altitudinem unius, si omnium altitudo æqvalis est (ut in methodo indivisibilium communi assumi solet) vel si inæqvalis, in maximam. Ergo si maxima[36]) vel certè cæteris non minor, ponatur esse novissima, dicta differentia nunqvam erit major rectangulo $_2B\,_3B\,_3N$, cuius altitudo cùm possit fieri qvantumlibet parva; etiam hæc differentia inter spatium gradiforme et mixtilineum dato aliqvo spatio minor reddi potest.

Jam summa rectangulorum elementarium $_1N\,_1B\,_2B\,_1P$ et $_2N\,_2B\,_3B\,_2P$ (aliorumqve etc), id est spatium gradiforme $_1N\,_1B\,_3B\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$ constituentium, æqvatur summæ ((basium (nempe))[37]) ordinatarum $_1B\,_1N$, $_2B\,_2N$[38]), ad curvam $_1N\,_2N\,_3N$), ductæ in altitudinem communem (si $_1B\,_2B$, vel $_2B\,_3B$ intervallum ordinatarum ponatur semper æqvale); ergo et spatium gradiforme metiri possumus summa applicatarum ducta in intervallum duarum proximarum semper æqvale. Spatium autem gradiforme eousqve produci potest, ut differentia eius à mixtilineo fiat minor qvavis data, ut ostendi[39]). Ergo si qvid de summa linearum sive area spatii gradiformis ita demonstrari poterit, ut locum habeat, utcunqve producatur spatium gradiforme, sive ut tum maximè locum habeat, cum spatii gradiformis applicatarum intervalla qvantum satis est exigua sunt, id etiam de mixtilineo verum erit, sive error si qvis committi potest, erit minor qvovis errore assignabili. Qvare methodo indivisibilium, qvæ per spatia gradiformia seu per summas ordinatarum procedit, ut severè[40]) demonstrata uti licebit.

---

[33]) B fälschlich: $_1N\,_1B\,_1B\,_3P\,_3N\,_2P\,_2N$; in A fehlt der Ausdruck.

[34]) A u. B fälschlich: $_1P\,_1N$, $_2P\,_2N$.

[35]) A u. B fälschlich: $_3D\,_3N$. Es ist: $_1P\,_2N + {}_2P\,_3N = {}_1P\,\gamma$ = Teil von $_2B\,\gamma$ oder von $_3B\,_3N$.

[36]) A: maxima ponatur novissima, vel si omnes ponantur æqvales dicta usw. wie in B.

[37]) A: summæ [basium] ((horum rectangulorum, sive summæ ordinatarum BN ad curvam $_1N\,_2N\,_3N$,)) ductæ in altitudinem omnibus communem ((seu in ordinatarum intervallum semper æqvale)), ergo et usw. wie in B.

[38]) In B folgt dann noch: $_3B\,_3N$.

[39]) A: ((ut etiam hîc ostendi,))

[40]) A: imposterum ut rigorosè.

Scholium.

Hâc propositione supersedissem lubens, cum nihil sit magis alienum ab ingenio meo qvàm scrupulosæ qvorundam[41]) minutiæ in qvibus plus ostentationis est qvàm fructus, nam et tempus qvibusdam velut cæremoniis consumunt, et plus laboris qvàm ingenii habent, et inventorum originem cæca nocte involvunt, qvæ mihi plerumqve ipsis inventis videtur præstantior. Qvoniam tamen non nego interesse Geometriæ, ut ipsæ methodi ac principia inventorum, tum verò theoremata qvædam præstantiora, severè demonstrata habeantur, receptis opinionibus aliqvid dandum esse putavi[42]).

Propositio VII.

„Si à qvolibet curvæ cuiusdam puncto ad unum anguli recti in eodem „((cum curva)) plano positi latus ducantur ordinatæ normales, ad alterum „tangentes, et ex punctis occursus tangentium ducantur perpendiculares ad „earum ordinatas si opus est productas; et curva alia per intersectiones „harum perpendicularium et ordinatarum transeat; erit spatium inter axem „(ad qvem ductæ sunt ordinatæ), duas ordinatas extremas, et curvam „secundam comprehensum, spatii inter curvam primam et rectas duas eius „extrema cum anguli recti propositi centro jungentes comprehensi duplum.

((Definitiones))[44]).

„Latus" cui ordinatæ ((1B 1C, 2B 2C occurrunt)) vocare soleo axem, A 1B 2B. alterum latus, A 1T 2T, ejusdem anguli recti TAB voco Axem

[41]) A: [illorum] ((qvorundam)) minutiæ, [qvi perpetuam demonstrandi formam, ad veterum, ut ajunt, morem compositam, à Geometra [ubiqve] exigunt]; qvæ ((sæpe)) ostentationis plus habet qvàm fructus: nam usw. wie in B.

[42]) in A folgt hier noch: De cætero optarem scribi aliqvando librum qvi Euclidis continuati loco sit, et qvem possimus imposterum tutò allegare. Ut enim Euclides Elementa ac Principia eorum dedit [artium] ((artificiorum)), qvibus tunc utebantur Geometræ; ita novorum inveniendi instrumentorum, qvæ inde ab Archimede ad nostra usqve tempora prodiere, vim ac potestatem in unum collectam, ((plenéqve demonstratam Euclidi subjici,)) res scientiarum profectui necessaria, nec autori ingloria erit: nam et ipse [gloriam] nomen suum cum Euclideo extendet in posteritatem; et nos labore multiplici ((levabit)), jam sæpe apud alios demonstrata, et apud Geometras elegantiores [in confesso] ((extra controversiam)) posita denuò demonstrandi; qvod tamen facere sæpe aut certè alios exscribere cogimur, qvorum libri non sunt in omnium manu. Jam si qvalem descripsi Euclidis continuatio habeatur, paulo liberius scribere poterunt Geometræ certitudine salva, et ratiocinationes per calculum [et] ((aut)) indivisibilia procedentes pro demonstrationibus agnoscent. Qvemadmodum jam Galilæum, et Cavalerium, et Guldinum, et Cartesium, et Wallisium, et Slusium, sed et aliqvando Hugenium fecisse video, qvorum certè exempla pro apologia esse poterunt imposterum scripturis. Neben diese Sätze hat Leibniz geschrieben: „Hæc in præfatione" und noch einmal: „NB. Hæc in præfatione meliora." Daher fehlen die Sätze in B.

[44]) Statt der „Definitiones" steht in A: ((Portiones autem lateris cui occurrunt tangentes, interceptos inter angulum et punctum occursus voco Resectas et figuram ad curvam secundam figuram resectarum.)) sit fig . . . curva

conjugatum, cui hoc loco occurrunt tangentes CT. Portiones ((A $_1$T, A $_2$T)) ab axe conjugato à tangentibus abscissas, inde à puncto A sumtas, voco Resectas, figuram ad curvam secundam $_1$D $_2$D $_3$D, ex resectis A $_1$T, A $_2$T in ordinatas novas $_1$B $_1$D, $_2$B $_2$D translatis factam, figuram Resectarum. Qvalis translatio fiet, si ex T, occursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB ((si opus est productas)) demittantur, et per puncta intersectionum D transeat curva $_1$D $_2$D $_3$D. His positis ajo spatium Qvadrilineum $_1$D $_1$B $_3$B $_3$D $_2$D $_1$D, parte axis $_1$B $_3$B, ordinatis extremis $_1$B $_1$D, $_3$B $_3$D et curva nova $_1$D $_2$D $_3$D comprehensum, seu figuram Resectarum esse sectoris sive spatii trilinei $_1$CA $_3$C $_2$C $_1$C, duabus rectis, ex anguli centro A ad curvæ prioris extrema $_1$C et $_3$C ductis, nempe A $_1$C et A $_3$C, ac ipsa curva priore $_1$C $_2$C $_3$C comprehensi duplum.

(1) Ponatur non esse duplum, et differentia inter Trilineum duplum et Qvadrilineum simplum sit Z. inscribantur ipsi curvæ $_1$C $_2$C $_3$C polygona numero finita qvotcunqve libuerit, qvantúmqve satis erit, et[45]) ultimum ex ejusmodi inscriptis Polygonis sit figura rectilinea A $_1$C $_2$C $_3$CA qvod rectis A $_1$C, A $_3$C, ex centro A ad curvam ductis, et rectis curvæ inscriptis sive chordis $_1$C $_2$C, $_2$C $_3$C comprehensum est. Hæ inscriptæ producantur, ut antea tangentes, donec ipsi AT in punctis $_1$M vel $_2$M occurrant rectæ productæ $_2$C $_1$C $_1$M vel $_3$C $_2$C $_2$M. Ex qvibus punctis M demissæ perpendiculares $_1$M $_1$N $_1$P[46]) vel $_2$M $_2$N $_2$P) etc secent ordinatas [$_1$B $_1$N $_1$C et $_2$B $_1$C $_2$C[46]) vel $_2$B $_2$N $_2$C et $_3$B $_2$P $_3$C[46]) in punctis $_1$N et $_1$P[46]) vel $_2$N et $_2$P[46]).] ((si opus productas $_0$B $_0$C, $_1$B $_1$C etc in punctis $_1$N, $_2$N, et ordinatas $_1$B $_1$C, $_2$B $_2$C etc in punctis $_1$S, $_2$N etc.))[47]).

(2) Ponamus nunc inscriptionem Polygonorum eousqve productam, donec polygoni[48]) A $_1$C $_2$C $_3$CA differentia à Trilineo $_1$CA $_3$C $_2$C $_1$C, itémqve spatii rectilinei Gradiformis $_1$B $_1$N $_1$P $_2$N $_2$P $_3$B $_1$B[46]), differentia à Qvadrilineo $_1$D $_1$B $_3$B $_3$D $_2$D $_1$D, una qvæqve singulatim, sit minor qvàm qvarta pars ipsius Z. [Qvod fieri posse de Polygonis constat ex

---

proposita $_1$C $_2$C $_3$C, à cuius punctis C ad anguli recti TAB latus AT ducantur tangentes CT, et ad alterum AB ordinatæ normales CB. ex T, occursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB demittantur, et per puncta intersectionum D transeat curva $_1$D $_2$D $_3$D. ((ipsas A $_1$T, A $_2$T, sive ipsas $_1$B $_1$D, $_2$B $_2$D vocabo resectas. ajo spatium Qvadrilineum usw. wie in B. — In B steht am Rande: * Definitiones (NB il faut écrire ce mot au milieu à l'endroit ou est l'étoile).

[45]) A: [sitqve ultimum ejusmodi inscriptum polygonum] ((et ultimum [aliqvod] ex ejusmodi inscriptis polygonis sit)) usw. wie in B.

[46]) So in A; in B ist P später in S umgeändert, ohne daß aber eine entsprechend geänderte Zeichnung hinzugefügt wäre.

[47]) Auch zu dieser späteren Änderung des Textes fehlt in B die passende Figur. Leibniz hat auch selbst bei Prop. VII. am Rande bemerkt: „Formanda figura peculiaris pro hac propositione."

[48]) A: Polygoni inscripti

demonstrationibus Archimedéis, de spatio verò Gradiformi et Qvadrilineo, si qvis rigorem desideret, inveniet demonstratum prop. 6. præcedenti.] ((potest enim eousqve produci, donec fiat minor qvantitate qvavis data.))

(3) His positis patet ex prop. 1. trianguli A_1C_2C duplum esse rectangulum $_1N_1B_2B$[49]), et trianguli A_2C_3C duplum esse rectangulum $_2N_2B_3B$[50]), et ita de cæteris, si qva sint, ergo et summa rectangulorum huiusmodi qvotcunqve seu spatium Gradiforme duplum erit summæ omnium ejusmodi triangulorum, seu polygoni inscripti.

(4) Jam differentia inter Qvadrilineum, qvod vocabo Q, et spatium gradiforme, id est (ut probavi artic. 3.) duplum polygonum inscriptum, qvod vocabo P, minor est qvàm qvarta pars ipsius Z, per artic. 2. et differentia inter duplum polygonum inscriptum P, et duplum trilineum, cui inscriptum est, qvod vocabo T, minor est qvàm duæ qvartæ ipsius Z (qvia inter ipsa simpla ex artic. 2. differentia minor est qvàm una qvarta), ergo per prop. 5. differentia inter Qvadrilineum Q et duplum Trilineum T minor est qvàm una qvarta ipsius Z plus duabus, seu minor est qvàm tres qvartæ ipsius Z. nam

si ita stent Qvantitates	Q	P[51])	T[51])
qvarum Differentiæ minores qvàm		$\frac{1}{4}Z$	$\frac{2}{4}Z$

erit differentia inter Q et T[51]) minor qvàm $\frac{1}{4}Z + \frac{2}{4}Z$ per dictam prop. 5.

(5) Qvoniam ergo differentia inter Qvadrilineum et duplum trilineum minor est qvàm $\frac{3}{4}Z$ per artic. 4. erit multo minor qvàm Z, ergo minor se ipsa (posita est enim esse Z, artic. 1.) Qvod est absurdum. Nulla ergo differentia assumi potest, cùm Z indefinita intelligi possit de qvalibet, adeoqve trilineum duplum et qvadrilineum simplum æqvalia sunt. Q. E. D.

Scholium.

Duo fortassis hîc notari è re erit, unum circa demonstrationem, alterum circa propositionem ipsam. Demonstratio illud habet singulare, qvod rem non per inscripta ac circumscripta ((simul)), sed per sola inscripta absolvit, [qvod nescio an hactenus salvo rigore fieri posse creditum sit; exemplum certè videre non memini: sed et peculiaribus ad eam rem propositionibus ac præparationibus opus fuit, ut facilè constabit examinanti.] Eqvidem fateor nullam hactenus mihi notam esse viam, qva[52]) vel unica qvadratura perfectè demonstrari possit sine deductione ad absurdum; imò rationes habeo, cur verear ut id fieri possit per naturam rerum ((sine qvantitatibus fictitiis, [ut qvibusdam videri possint, de qvibus infra prop. 23. Schol.] infinitis scilicet vel infinitè parvis assumtis)): ex omnibus tamen ad absurdum deductionibus nullam esse credo simplicem magis et naturalem, ac directæ demonstrationi

[49]) A u. B fälschlich: $_1N_1B_2B_2N$.
[50]) A u. B fälschlich: $_2N_2B_3B_3N$.
[51]) Besser: 2 P, 2 T.
[52]) A: viam, [vel ullam qvadraturam rigorosè demonstrandi] ((wie B)).

propiorem, qvàm qvæ non solùm simpliciter ostendit, inter duas qvantitates nullam esse differentiam, adeoqve eas esse æqvales (cùm alioqvin alteram altera neqve majorem neqve minorem esse ratiocinatione duplici probari soleat), sed et qvæ uno tantùm termino medio, inscripto scilicet vel circumscripto, non verò utroqve simul, utitur; adeoqve efficit, ut clariores de his rebus comprehensiones habeamus. Qvod ad ipsam attinet propositionem, arbitror [nullam facilè generaliorem extare] ((unam esse ex generalissimis, atqve utilissimis, qvæ extant)) in Geometria, usqve adeò enim universalis est, ut omnibus curvis, etiam casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis, conveniat; et data qvalibet figura alias exhibeat ((numero)) infinitas, qvarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriæ theoremata haberi potest; nam hinc statim demonstrantur Qvadraturæ omnium Paraboloidum[53]) aut Hyperboloidum[54]) in infinitum; sive figurarum, in qvibus ordinatæ vel ipsarum[55]) potentiæ sunt in multiplicata aut submultiplicata directa aut reciproca ratione abscissarum aut potentiarum ab abscissis; et ut alias taceam qvadraturas infinitas absolutas vel hypotheticas, circulum certè ((ed qvamlibet conicam centrum habentem)) eius ope transformavimus in figuram rationalem, et hinc Qvadraturam totius circuli ac[56]) portionis cuiuslibet Arithmeticam, ac veram perfectámqve arcus ex data tangente expressionem analyticam duximus, qvibus demonstrandis hic tractatus occupatur. Porro cum Clarissimi Geometræ, qvi Conica universaliter tractare cœpêre, [Desargues et Pascalius], ordinatarum ad curvas nomine comprehendant non tantùm rectas parallelas, qvales sunt $_1C\,_1B$, $_2C\,_2B$, $_3C\,_3B$, ut vulgò fieri solet, sed etiam rectas $A\,_1C$, $A\,_2C$, $A\,_3C$, qvæ omnes ad unum punctum commune A convergunt (qvod vel ideò rectè fit, qvoniam ipsæmet parallelæ sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantùm ut punctum concursus earum seu centrum commune infinitè [absit] ((abesse fingatur)), qvemadmodum alter parabolæ focus aut vertex); hinc jam ope theorematis huius nostri feliciter evenit, ut harum qvoqve novarum ordinatarum, nempe convergentium, usus esse possit ad qvadraturas, utqve figuræ non tantùm per ordinatas parallelas in parallelogramma $_1C\,_1B\,_2B$ vel $_2C\,_2B\,_3B$ aliáqve à Cavalerio aliísqve post ipsum fieri solitum est; sed et per ordinatas convergentes in triangula $A\,_1C\,_2C$ vel $A\,_2C\,_3C$ infinitis modis resolvantur, prout variè assumitur punctum A, unde ingens novorum inventorum campus aperitur, qvorum hic elementa[57]) damus, ex qvibus scio non pauca, neqve his inferiora duci posse.

[53]) A: Paraboloeidum.

[54]) A: Hyperboloeidum.

[55]) A: earum.

[56]) A: pariter ac.

[57]) A: [fundamenta jacimus, qvibus certum est, non pauca neqve his [qvæ damus] inferiora [superædificari] superstrui posse] ((elementa damus, ex qvibus ... duci posse)).

Definitiones[58]).

Segmentum . . . Sector . . . Zona . . .

Figura Angulorum . . .

Ordinatarum nomine intelligi solent rectæ parallelæ, ut $_1B\,_1C$, $_2B\,_2C$ etc, à qvolibet curvæ $_1C\,_2C\,_3C$ puncto $_1C$ vel $_2C$ alióve ad rectam qvandam indefinitæ longitudinis[59]) $A\,_1B\,_2B$ etc qvæ à qvibusdam Directrix appellatur ductæ; alii simpliciter vocant parallelas, alii ordinatim applicatas; aliqvando ordinatarum nomine strictè sumto, intelliguntur tantùm normales ad directricem, et tunc directrix vocatur Axis, qvoniam tunc figura circa directricem velut axem rotata[60]) solidumqve generante, ordinata qvælibet circulum generat basi solidi parallelum.

Aliqvando voce laxè sumta [ut à Pascalio factum est in impressa qvadam de Conicis Scheda, qvæ specimen majoris operis, inediti qvidem, sed si qvod aliud illius generis Geometricum edi digni, fuit;][61]) per ordinatas, ut supra dixi, intelliguntur et rectæ convergentes, sive ab eadem curva ad punctum unum, velut centrum, concurrentes, qvod suos habet usus sanè præclaros, qvoniam plurima theoremata omnibus ordinatis generalissimo hoc sensu communia, haberi possunt. Nos in hoc qvidem argumento ordinatarum nomine parallelas, et potissimum normales, intelligemus, qvod plerumqve[62]) ex subjecta materia satis apparebit.

Porro qvando ordinatæ parallelæ ad qvandam directricem ducuntur, tunc solet assumi in directrice punctum aliqvod fixum, ut A, et portiones directricis inter punctum fixum, A, et occursum ordinatarum, nempe punctum $_1B$ vel $_2B$ comprehensæ, solent vocari Abcissæ, aliqvi vocant portiones Axis. Harum autem abscissarum usus esse solet ad explicandam curvæ naturam per relationem abscissarum et ordinatarum inter se, ut si dicamus ipsas $_1B\,_1C$, $_2B\,_2C$ esse inter se in subduplicata ratione abscissarum $A\,_1B$, $A\,_2B$, vel qvod eodem redit, si una tantùm aliqva abscissa atqve ordinata assumta dicamus semper fore rectangulum sub $A\,_1B$ abscissa et certa qvadam recta constante, æqvale qvadrato ordinatæ $_1B\,_1D$, tunc curva $A\,_1C\,_2C$ erit Parabola. Eodem modo si essent ordinatæ $_1B\,_1D$, $_2B\,_2D$ inter se in triplicata ratione abscissarum $A\,_1B$, $A\,_2B$, vel qvod idem est, una tantùm abscissa et ordinata assumtis, si cubus ab $A\,_1B$ abscissa, æqvaretur solido ex qvadrato cujusdam rectæ constantis, in ordinatam $_1B\,_1C$, foret curva Parabola Cubica.

Directrices conjugatas, vel cum angulus rectus est, qvem comprehendunt, axes conjugatos voco (ad exemplum Diametrorum conjugatarum jam apud veteres receptarum), cum abscissæ unius sunt æqvales ordinatis ad alteram, et contra. Qvod fit, si modò eæ ((directrices)) sese

[58]) Vgl. die kurze Zusammenfassung in C (Math. Schr. V, S. 101).

[59]) A: indefinitam.

[60]) A: gyrata.

[61]) In B unleserlich gemacht, aus A wiederhergestellt.

[62]) A: semper.

intersecent in puncto fixo, seu initio abscissarum, et una sit parallela ordinatis ad alteram. Ut si sit curva $_1D\,_2D$, et directrix sit $A\,_1B\,_2B$, et ordinatæ[63]) ad hanc directricem angulo qvocunqve inter se parallelæ, sint $_1B\,_1D$, $_2B\,_2D$, abscissæ ex directrice sint $A\,_1B$, $A\,_2B$, deniqve per initium abscissarum A transeat AT, ipsis $_1B\,_1D$ vel $_2B\,_2D$ parallela, ea ((recta AT)) erit directrix, conjugata priori AB[64]): nam in ipsa portio $A\,_1T$, æqvalis ipsi $_1B\,_1D$, ordinatæ ad directricem priorem AB, poterit sumi pro abscissa, et ipsa $_1T\,_1D$, æqvalis ipsi $A\,_1B$, abscissæ ex directrice priore, erit ad conjugatam directricem ordinata. Hæc consideratio magnos habet usus in omni Geometria, sed inprimis in materia de Qvadraturis. Ordinatas porro ad Directrices conjugatas, etiam ordinatas conjugatas appello.

Trilineum orthogonium, vel aliqvando simpliciter Trilineum, cum qvibusdam voco, spatium axe, ordinata aliqva normali, et curva comprehensum, ut $A\,_2B\,_2C\,_1CA$, comprehensum axis portione seu abscissa $A\,_2B$, ordinata $_2B\,_2C$, et curva $_2C\,_1CA$[65]), unde necesse est ut curva perveniat usqve ad axem, axis portionem $A\,_2B$ vocare solent altitudinem, ordinatam trilineum terminantem $_2B\,_2C$, basin. At[66]) $A\,_2B\,_2C\,_2G$ Rectangulum circumscriptum vocant, qvod communem habet altitudinem cum figura trilinea, basin vero æqvalem maximæ ordinatæ: qvæ si etiam ultima trilinei assumti est, tunc manifestum est hoc rectangulum (vel si ad ordinatas obliqvas extendas, parallelogrammum) circumscriptum qvatuor rectis comprehendi, ex qvibus duæ sunt ordinatæ conjugatæ, et duæ abscissæ conjugatæ, qvoniam semper abscissa unius directricis ordinatæ ad alteram relatæ æqvalis et parallela est. Ita Trilinei orthogonii $A\,_2B\,_2C\,_1CA$ rectangulum circumscriptum[67]) est $A\,_2B\,_2C\,_2GA$. Complementum Trilinei orthogonii seu Trilineum complementale vocant, qvod Trilineo orthogonio adscriptum, complet Rectangulum circumcriptum[68]), ut si Trilineo orthogonio $A\,_2B\,_2C\,_1CA$ adscribatur Trilineum complementale $A\,_2G\,_2C\,_1CA$, constituetur rectangulum circumscriptum[69]) $A\,_2B\,_2C\,_2G$. Unde

---

[63]) Zusatz von A: ex curva.

[64]) A: directrix conjugata; C: condirectrix.

[65]) A: $A\,_1C\,_2CA$; B: [A] $_1C\,_2CA$.

[66]) A: Rectangulum autem circumscriptum, qvod eandem habet altitudinem, cum [Trilineo] ((figura)), basin verò æqvalem maxima [Trilinei] ordinatæ; qvòdsi maxima ordinata est ultima, tunc Rectangulum circumscriptum eandem habet basin et altitudinem cum trilineo orthogonio, et à [nonnullis] ((R. P. Honorato Fabrio)) vocatur isoparallelum, qvod etiam ad trilinea non-orthogonia, et parallelogramma ipsis circumscripta extendi posset; et manifestum est semper hoc isoparallelum ex qvatuor rectis, duabus scilicet ordinatis, et duabus abscissis, utriusqve scilicet Directricium conjugatarum, constitui, qvoniam semper usw. wie in B.

[67]) A: Rectangulum Isoparallelum.

[68]) A: Isoparallelum complet.

[69]) A: circumscriptum, Isoparallelum.

seqvitur ea sibi mutuo complementa esse, et esse ad Directrices conjugatas, et eandem curvam habere communem, et ubi unum est concavum, ibi alterum esse convexum, et altitudinem unius æqvari basi alterius et contra, aliáqve id genus, qvæ cuivis manifesta sunt.

Intersectio Directricium conjugatarum, seu initium commune trilineorum se mutuò complentium, sive[70]) punctum in qvo ordinata[71]) fit infinitè parva, vel evanescit, ac curva ad axem pervenit, solet appellari vertex trilinei vel apex, qvi etiam[72]) est punctum fixum sive initium abscissarum ((dicitur)): sed non solet appellari vertex curvæ, nisi qvando alterutra directricium in eo curvam tangit.

Per Summam Rectarum ad qvendam axem applicatarum intelligimus figuræ perpetua applicatione factæ aream, ut si dicam summam omnium AT ad axem AB, inteligo figuram ex omnibus AT in respondentibus punctis B, axi ordine applicatis, factam, ut ((si)) A_1T translata ((sit))[73]) in $_1B\,_1D$ æqvalem, atqve ita applicata ((sit)) ad A_1B abscissam; et ita de cæteris. Angulus autem applicationis solet intelligi rectus[74]). Sed nec necesse est ut applicatæ ipsum axem attingant, veluti: summa differentiarum inter AT et BC, qvæ æqvantur ipsis DC, dabit aream figuræ $_1D\,_1C\,_2C\,_3C\,_3D\,_2D\,_1D$. Hæ autem loqvendi formulæ permissæ erunt, [supposita indivisibilium methodo, seu dimensione arearum per summas linearum demonstrata[75]), secundum ea qvæ diximus prop. 6., prorsus qvemadmodum permissum erit, figuras qvales descripsimus prop. 6. et 7., qvoties curva $_2D\,_1DA$ in angulum A pervenit, appellare figuras segmentorum, ubi demonstratum erit segmentis figurarum[76]) generantium esse proportionales. Qvod nunc faciemus.] ((si qvis fig. 8.[77]) per summam omnium rectarum, verbi gratia omnium BC (id est ipsarum $_1B\,_1C$ et $_2B\,_2C$ et $_3B\,_3C$ etc aliarumqve) intelligat summam omnium rectangulorum, ut $_0B\,_1B\,_1C$, $_1B\,_2B\,_2C$, $_2B\,_3B\,_3C$ etc sub ipsis rectis $_1B\,_1C$, $_2B\,_2C$, $_3B\,_3C$ etc et constante intervallo semper æqvali $_0B\,_1B$ vel $_1B\,_2B$ vel $_2B\,_3B$ etc indefinitæ parvitatis assumto, comprehensis. Qvicqvid enim de tali summa demonstrari poterit, sumto intervallo utcunqve parvo, id qvoqve de areæ curvilineæ $_0C\,_0B\,_3B\,_3C\,_0C$ magnitudine demonstratum erit, cum summa ista (intervallo satis exiguo

---

[70]) A: vel si uno tantum loqvamur,

[71]) A: ordinata ((unius ex Trilineis)).

[72]) A: vertex trilinei, qvi semper etiam.

[73]) A: translata in $_1B\,_1D$ et applicata ad A_1D (Schreibfehler für A_1B), et ita usw. wie B.

[74]) A: explicandus autem est angulus applicationis, qvi solet intelligi rectus.

[75]) A: linearum, demonstrata, per ea qvæ usw. wie in B.

[76]) A: curvarum.

[77]) Der Zusatz: ((si qvis fig. 8...)) ist in B am Rande hinzugefügt als Ersatz für die gestrichenen Sätze: [supposita indivisibilium methodo...] In A stehen nur diese in B gestrichenen Sätze.

sumto) talis esse possit, ut ab area[78]) differentiam habeat data qvavis minorem. Et proinde si qvis assertiones nostras neget, facile convinci possit ostendendo errorem qvovis assignabili esse minorem, adeoqve nullum. Has cautiones nisi qvis observet, facilè ab indivisibilium[79]) decipi potest. Exemplum infra dabimus prop....[80])).

Propositio VIII.[81])

„Iisdem positis qvæ in propositione præcedenti, eadem locum habebunt, „licet initium utriusqve curvæ in angulum rectum incidat, sive licet[82]) puncta „$_1$B, $_1$C, $_1$D, inter se et cum puncto A, coincidere intelligantur, adeoqve „figuræ qvam voco segmentorum portio seu trilineum orthogonium „generantis A $_3$B $_3$D $_2$DA[83]) æqvale erit duplo segmento figuræ A $_3$C $_2$CA.

Hoc uno verbo confici potest, ex eo qvòd qvæ propositione 7. demonstravimus generalia sunt, et[84]) locum habent, utcunqve parvæ sint rectæ A $_1$C, A $_1$B, $_1$B $_1$D, $_1$B $_1$C, ac proinde etsi sint infinitè parvæ[85]), sive etsi puncta coincidant, ubi sector $_1$CA $_3$C $_2$C $_1$C [A] degenerabit in segmentum A $_3$C $_2$CA; et qvadrilineum sivè zona huius sectoris dupla $_1$D $_1$B $_3$B $_3$D $_2$D $_1$D degenerabit in trilineum orthogonium A $_3$B $_3$D $_2$DA, ergo hoc trilineum huius segmenti duplum erit. Si qvis tamen lineam[86]) infinitè parvam ferre non possit, hunc non ideò minus convincemus. Neget esse duplum, et differentia inter unum duplum et alterum simplum sit Z. Assumatur recta A $_1$B tam parva, ut rectangulum A $_1$B $_1$C $_2$T sit minus qvàm qvarta pars ipsius Z, ergo et qvæ intra ipsum sunt, segmentum exiguum A $_1$CA, [et] ((item)) trilineum exiguum A $_1$B $_1$DA erunt minora qvàm $\frac{Z}{4}$. Segmentum exiguum est differentia segmenti magni A $_3$C $_2$CA, et sectoris $_1$CA $_3$C $_2$C $_1$C [A], et trilineum exiguum

[78]) B: [ab area] ab ista summa rectangulorum

[79]) zu ergänzen: methodo (wahrscheinlich am Rande zerstört).

[80]) prop. XXII, scholium.

[81]) A: Propositio Octava. Iisdem qvæ in propositione præcedenti positis, si curvæ (($_3$C $_2$C $_1$CA, $_3$D $_2$D $_1$DA)) in ipsum angulum rectum A pertingant et trilineum orthogonium ad curvam generatam ((constituatur A $_3$B $_2$D $_3$D $_1$DA)) cuius vertex ((sit)) angulus ((ipse, A,)) axes conjugati latera anguli ((AB, AT)); altitudo ((A $_3$B)) sit portio axis ((AB)) ad qvem applicantur ordinatæ curvæ generantis ((BC)); basis verò (($_3$B $_3$D alicuius ex)) ordinatis ((generantis ut $_3$B $_3$C)) productæ si opus est, portio; ((tunc)) erit trilineum hoc orthogonium æqvale duplo segmento (($_3$C $_2$C $_1$CA,)) qvod curva generante (($_3$C $_2$C $_1$CA)) et recta ((A $_3$C)) ab angulo recto supradicto A, ad (($_3$C)) intersectionem basis (($_3$B $_3$D $_3$C)) et curvæ generantis, ((perveniente)) continetur. Brevius: Iisdem positis qvæ usw. wie in B.

[82]) A: et statt sive licet.

[83]) A: fälschlich: A $_3$B $_3$D $_2$A.

[84]) A: adeoqve statt et.

[85]) A: [infinitè parvæ] ((nullæ)).

[86]) A: zuerst wie später in B, dann: ((majorem rigorem desideret huic non ideo minus satisfaciemus)).

est differentia trilinei magni A 3B 3D 2DA et Qvadrilinei 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Ergo erit:

Determinatio prima: Differentia inter segmentum magnum et sectorem, qvæ est[87]) ipsum segmentum exiguum, est minor qvàm $\frac{Z}{4}$.

Determinatio secunda: Differentia inter Trilineum magnum et Qvadrilineum, qvæ est[87]) ipsum Trilineum exiguum est minor qvàm $\frac{Z}{4}$. Et qvoniam per prop. 7. qvadrilineum æqvale duplo sectori; hinc et determinatione 2. seqvitur

Determinatio tertia: Differentia inter trilineum magnum et duplum sectorem minor est, qvàm $\frac{Z}{4}$. Ex determinatione autem 1. seqvitur

Determinatio qvarta: Differentia inter duplum sectorem et duplum segmentum est minor qvàm $\frac{2}{4}$ Z. Ex determinationibus tertia et qvarta oritur Schema seqvens

Qvantitates:	Trilin. magn.	dupl. sect.	dupl. segm.
Differentiæ		min. qvàm $\frac{Z}{4}$	min. qvàm $\frac{2}{4}$Z.

Ergo per prop. 5. Trilinei magni et dupli segmenti differentia minor est qvàm $\frac{Z}{4} + \frac{2}{4}$ Z, seu minor qvàm $\frac{3}{4}$ Z. Ergo[88]) minor seipsa, posita est enim esse Z. qvod est absurdum, nulla ergo poni[89]) potest differentia Z, adeoqve Trilineum magnum nempe A 3B 3D 2DA æqvale erit duplo segmento A 3C 2CA. Qvod demonstrandum erat.

Scholium.

Hæc ideò minutius exposui, ut viri docti agnoscant, qvàm nullo negotio severè demonstrari qveant, qvæ illis suspecta videntur, qvò possint imposterum Geometræ his minutiis tutò supersedere, cùm similis ratiocinatio inciderit.

Propositio XI.[90])

„À figura curvilinea[91]) utcunqve exigua portionem abscindere, cuius „duplo exhibeatur æqvalis figura longitudinis infinitæ, infinitis modis.

Qvantulacunqve sit figura curvilinea, utiqve infinitis modis aliqvod curvæ eius 2C 3C 4C μ (redeundo ad fig. 3.) punctum eligi potest, ((qvale est)) μ[92]), ad qvod duci potest tangens μ λ, et ad hanc tangentem perpendicularis 2B μ, intra figuram; ita ut abscindi possit à figura trilineum orthogonium 2C 2B μ 4C 3C 2C. ajo huius duplo æqvalem posse exhiberi figuram infinitam; et ostendi ((posse)) modum exhibendi.

---

87) A: seu statt qvæ est.

88) A: ((Ergo multo minor qvam Z)) Ergo minor seipsa usw.

89) A: supponi.

90) A: Propositio Nona. (Der Satz 10 von B ist in A erst nachträglich ohne Zahl eingeschoben, und die Zahl 9 ist in A versehentlich beim folgenden Satze (Satz 11 von B) noch einmal wiederholt.)

91) A: curvilinea ((data)).

92) A: ut μ B: [ut] ((qvale est)) μ.

Per aliqvod rectæ $_4B\mu$, productæ si ita libuerit, punctum A, ducatur perpendicularis AT, parallela scilicet tangenti $\mu\lambda$, et ex curvæ $_2C\mu$ punctis $_3C$ aut $_4C$ ducantur tangentes qvæ ipsi AT occurrant in punctis $_3T$ et $_4T$ et similibus; et ex punctis occursuum $_3T$, $_4T$ demittantur perpendiculares[93]) $_3T\,{}_3D$, $_4T\,{}_4D$ ad $_3B\,{}_3D$, $_4B\,{}_4D$ ordinatas tangenti $\mu\lambda$ parallelas, si opus est, productas: ídqve perpetuò factum intelligatur[94]), à puncto $_2C$ usqve ad punctum μ, ut in prop. 7. ((tunc)) habebimus spatium infinitum $_2D\,{}_2B\,\mu\lambda\delta\,{}_4D\,{}_3D\,{}_2D$[95]), duabus lineis rectis finitis $_2D\,{}_2B$ et $_2B\mu$, duabúsqve lineis infinitis, una curva in infinitum procedente $_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$, altera recta ipsi asymptoto $\mu\lambda$, comprehensum.

Porro[96]) Curvam $_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$[97]) infinitam esse patet, qvia qvanto propius aberit punctum ut $_4C$ à puncto μ, hoc longior erit recta A $_4T$, et si qva detur linea recta finita, poterit semper punctum ut $_4C$ tale tamqve propinqvum puncto μ mente designari, ut ipsa A $_4T$, vel ei æqvalis $_4B\,{}_4D$, sit data linea recta finita major, adeoqve curva $_4D\,\delta$[98]) procedet in infinitum versus λ[99]); semperqve magis magisqve descendet ad rectam $\mu\lambda$, prout punctum ut $_4B$ vel $_4C$ vel $_4D$ ipsi $\mu\lambda$[100]) propius assumitur:[101]) nunqvam tamen ad rectam $\mu\lambda$ perveniet. Nam si ad eam perveniret in puncto aliqvo ut λ, ipsa $\mu\lambda$ foret ordinata ad curvam, adeoqve æqvalis[102]) portioni ex AT, per tangentem in μ, id est per ipsam $\mu\lambda$, ipsi AT, si possibile esset, occurrentem, abscissæ, sive Resectæ; sed $\mu\lambda$ ipsi AT sibi parallelæ occurrere impossibile est, qvare nec recta $\mu\lambda$ uspiam occurret curvæ $_4D\,\delta$[97]) ac proinde erit asymptotos.

Superest ut ostendam spatium longitudine infinitum $_2D\,{}_2B\,\mu\lambda$ etc $\delta\,{}_4D\,{}_3D\,{}_2D$[103]) æqvari duplo trilineo orthogonio $_2C\,{}_2B\,\mu\,{}_3C\,{}_2C$. Verùm[104])

---

[93]) A u. B fälschlich: demissis perpendicularibus.

[94]) A: perpetuò [fiat] ((wie B)).

[95]) A u. B: $_2D\,{}_2B\,\mu\lambda\beta\,{}_4D$.

[96]) A: [Porro] ((Ac)) primum... Am Rande: Artic. 1.

[97]) A u. B fälschlich β statt δ.

[98]) B: $_4D\,\beta$ A: $_4D$ [β] ((δ)).

[99]) A am Rande: Artic. 2.

[100]) A: punctum in curva $_4C\mu$ ipsi μ.

[101]) A am Rande: Artic. 3.

[102]) Der Rest des Absatzes lautet in A: æqvalis ipsi A..T imaginariæ, inter A et punctum... T imaginarium, qvo tangens ex μ ducta ipsi T occurrit, interceptæ, qvod punctum impossibile est, qvia cum $\mu\lambda$ sit ipsi AT parallela, ex constructione nuspiam occurret, adeoqve nec recta $\mu\lambda$ ((tangens in μ)) uspiam occurret curvæ $_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\beta$ (muß heißen δ). Qvoniam ergo curva in infinitum per artic. 1. accedit rectæ $\mu\lambda$ per artic. 2. nec tamen eam attingit per artic. 3. ipsa $\mu\lambda$ erit asymptotos.

[103]) A u. B. $_2D\,{}_2B\,\mu\lambda$ etc $\beta\,{}_4D\,{}_2D\,{}_3D$.

[104]) In A lautete der Rest des Absatzes zuerst so: Porro ut hoc exactè ostenderem, nulla mihi occurrit ratio commodior, qvàm qvæ absolvitur per motum aliqvem possibilem suppositum. Cogitemus ergo esse in puncto A defixam lineam

hoc non aliter fieri potest (ne qvis hîc erret), nisi ((pro)) recta $\mu\lambda$ ((ponatur recta $(\mu)\lambda$, puncto (μ) paulo supra punctum μ sumto, intervallo $(\mu)\mu$ infinitè parvo, ita ordinata $(\mu)\lambda$ erit longitudine infinita; major qvalibet assignabili ${}_4B\,{}_4D$, qvia etiam ipsa $\mu\,(\mu)$ qvolibet assignabili intervallo $\mu\,{}_4B$ minor est.

qvandam materialem, vel si placet alligatum funem, qvi initio protensus sit usqve ab A in ${}_2C$, ibiqve occurrat regulæ rigidæ ${}_2B\,{}_2C\,\gamma$, qvæ secundum axem AB descendere sive fluere potest in ${}_3B\,{}_3C\,{}_3N$, servato semper parallelismo. Ponamus funem manu regi, semperqve extendi et prolongari posse, manu per curvam ${}_2C\,{}_3C\,{}_4C$ descendente, funemqve tensum et prolongatum secum ducente atqve regulam ((mobilem ${}_2B\,{}_2C\,\gamma$)) sibi obstantem depellente, ita ut manu veniente in ${}_3C$, cume fune protenso $A\,{}_3C$, regula ((mobilis)) ${}_2B\,{}_2C\,\gamma$*) defluxerit in ${}_3B\,{}_3C\,{}_3N$, et fune veniente in situm $A\,{}_4C$, regula veniat in ${}_4B\,{}_4C\,{}_3P$, et ita porro donec funis pariter et regula deveniant usqve ad μ. His ita constructis ita ratiocinor: durante motu, portio figuræ infra rectam ${}_2B\,{}_2D$ et inter curvam ${}_2D\,{}_3D\,{}_4D$ etc**) et axem ${}_2B\,{}_3B\,{}_4B$ etc comprehensa, qvam regula ((mobilis)) supra se relinqvit, semper dupla est sectoris, qvem funis à sectore toto ${}_2CA\,{}_2B\,\mu\,{}_4C\,{}_3C\,{}_2C$ abscindit, nempe cum funis pervenit in $A\,{}_3C$, et regula in ${}_3B\,{}_3C$, tunc figura ${}_2D\,{}_2B\,{}_3B\,{}_3D$***) qvam regula supra se reliqvit, est dupla portionis à sectore totali abscissæ seu sectoris ${}_2CA\,{}_3C\,{}_2C$ per prop. 7. idemqve perpetuò fiet, donec motus cesset, qvod non ante fit, qvàm cum funis et regula pervenêre in μ, neqve punctum ullum inter ${}_2B$ et μ assignari potest, qvo hæc æqvalitas desinat; cum ergo usqve ad momentum, qvo cessat motus, duplæ semper rationis spatia eo qvo dixi modo supra se relinqvant regula et funis, ipso cessationis momento duplæ qvoqve rationis spatia supra se reliquisse deprehendentur, alioqvi ((contra id qvod diximus)) aliqvando ante cessationem motus id facere cessassent ((cum ultimum motus momentum solum nullam varietatem afferat nec spatium ullum adjiciat adimatve)). Deprehenditur autem regula (${}_2B\,\gamma$ cum pervenit in $\mu\,\xi$)). supra se reliqvisse spatium ((longitudine)) infinitum ${}_2D\,{}_2B\,\mu\,\lambda$ etc δ†) ${}_4D\,{}_3D\,{}_2D$, et funis sectorem totum ${}_2CA\,\mu\,{}_4C\,{}_3C\,{}_2C$, spatium ergo hoc longitudine infinitum huius sectoris duplum erit. Porro cum punctum A ((imò et punctum μ)) aliud semper atqve aliud sumi possit, ut alia taceam, idem infinitis modis præstari posse patet.

Später hat L. an den Rand geschrieben: ((Est paralogismus satis subtilis. Idqve apparebit, si in formam redigatur. Occasio autem detegendi præbita a spatiis hyperbolicis seu reciprocis infinitis. Demonstro (vgl. Fig. 8) esse ${}_1C\,{}_1B\,{}_2B\,{}_2C\,{}_1C$ ad ${}_1C\,{}_1G$ ${}_2G\,{}_2C\,{}_1C$ ut numerus ad numerum. Eademqve regula procedens continuè versus AG semper tantundem uni dabit, qvantum dat alteri conjugatæ. Qvod cum semper fiet durante motu, cuius ultimum motus momentum nihil addat adimatqve, ergo semper ita erunt; et totum asymptotum ${}_1C\,{}_1GM\,{}_3C\,{}_2C\,{}_1C$ ad totum ${}_1C\,{}_1BAM\,{}_3C\,{}_2C\,{}_1C$ ut numerus ad numerum, ergo semper finita, et in Hyperbola æqvalia, q. e. absurdum, nam in Hyperbola differunt utiqve rectangulo $A\,{}_1B\,{}_1C\,{}_1G$; ergo error in tali ratiocinatione. Itaqve asymptotorum non procedit contemplatio in rigorosis, nec inventio summæ, sed tantùm in sumendo spatium qvod absit infinitè parva distantia.)) Daran schließt sich (wegen Platzmangels darüber an den Rand geschrieben) der Beweis, der mit kleinen Änderungen auch in B übernommen ist: ((Sed hoc non aliter fieri potest (ne qvis hic erret) nisi ponatur recta $\mu\lambda$ non esse ipsi AT omnino parallela ((sed ad eum nonnihil inclinata)) nec proinde curvæ $D\,\delta$ asymptotos, usw. wie im Text.

*) A Schreibfehler: $A\,{}_2C\,\gamma$.

**) A Schreibfehler: ${}_2D\,{}_3D$ [etc] ${}_4C$.

***) A Schreibfehler: ${}_2D\,{}_3B\,{}_3D\,{}_2D$.

†) A Schreibfehler: β statt δ.

Proinde (μ) λ non erit curvæ D δ asymptotos,)) sed ei occurrens alicubi ut in λ, licet λ absit infinito abhinc intervallo. Id est recta (μ) λ[105]) erit qvidem infinita[106]), sive qvavis designabili major, sed non interminata[106]). Hoc posito utiqve ex prop. 7. spatium $_2$D $_2$B (μ) λ δ $_4$D $_3$D $_2$D[107]), inifinitæ baseos (μ) λ[108]), ipsius finiti $_2$C $_2$B μ $_4$C $_3$C $_2$C[109]) duplum erit. Generalis enim est propositio 7. nec longitudinem aut brevitatem linearum moratur[110]).

((111]) aliter demonstrandum qvod neqve major[112]) qvia non potest inveniri pars eius finito æqvalis. Nec minor qvia nec pars alterius ipsi æqvalis. idem fieri potest infinitis modis. infiniti pars finita assumi potest dato finito major.))

Scholium.

[113]) Memorabilis[114]) est contemplatio de spatiis longitudine infinitis, magnitudine tamen finitis. Veteribus, qvod sciam, nihil tale innotuit, et satis ipsis mirum videbatur, esse qvasdam rectas asymptotos, qvæ magis magisqve ad curvam accederent, nunqvam tamen ad eam pervenirent. Primus, ut puto, Torricellius solidum Hyperbolicum acutum longitudine infinitum dimensus est, et ad [cubum] ((cylindrum)) qvendam ((finitum)) reduxit: in plano P. Gregorius à S. Vincentio spatium infinitum inter duas Hyperbolas certa ratione comprehensum qvadravit, et Vir suo merito celeberrimus, Christianus Hugenius, spatium cissoidale infinitum ad circulum revocavit. Et Geometra eximius, Joh. Wallisius, ostendit qvomodo innumeræ sint Hyperboloides[115]), qvarum area, licet longitudine infinita, possit inveniri, et qvomodo possint illæ ab aliis, qvæ id non patiuntur, probabili ratione discerni; qvod[116]) qvanqvam inductione utatur, plurimum tamen ingenii habet. ((adde infra prop. 22. ubi demonstravimus.)) Nobis propositio septima viam dedit, cuiuslibet curvæ datæ segmento cuidam vel sectori, utcunqve parvo, duplicato, infinitis modis, figuras longitudine infinitas exhibendi æqvales. Qvod aliis etiam rationibus fieri posse non ignoramus[117]).

[105]) A: μ λ.

[106]) Nur in A unterstrichen.

[107]) A: $_2$D $_2$B μ λ δ $_2$D; B: $_2$D $_2$B (μ) λ δ $_2$C.

[108]) A: infinitum.

[109]) A u. B fälschlich: $_1$C $_1$B μ $_4$C $_2$C.

[110]) Statt dieses Satzes steht in A nur: Qvod asserebatur.

[111]) Neben den vorhergehenden Absatz (Superest ut ostendam . . .) hat Leibniz nachträglich das Zeichen: ℌ, d. h. deleatur, gesetzt. Dann ist an den Rand die folgende Bemerkung über den geplanten, aber nicht ausgeführten Ersatzbeweis geschrieben.

[112]) B Schreibfehler: maius.

[113]) In B ist das ganze Scholium später gestrichen, wahrscheinlich zu derselben Zeit, wo der vorhergehende Schlußteil des Beweises mit ℌ bezeichnet ist.

[114]) A: Admiranda.

[115]) A: Hyperboloeides.

[116]) qvod qvanqvam . . . demonstravimus fehlt in A.

[117]) Hierzu spätere Randbemerkung in A (wahrscheinlich aus der gleichen

Cæterum[118]) ingenuitas nostra non patitur ut dissimulemus, non esse ista tam mira, qvàm hominibus primo aspectu videntur. R. P. Pardies[119]) è Societate Jesu, scriptis elegantibus notus eruditis, ac vita longiore dignus, tantùm hujusmodi[120]) meditationibus tribuebat, ut crederet efficax satis argumentum præbere ad evincendam animæ immaterialitatem[121]) ((qvemadmodum in compendii Geometrici præfatione asseruit)). Mihi videtur ipsam per se naturam mentis, et operationes, præsertim qvibus in se revertitur, sufficere ut ((à Corpore, sive)) à re duobus tantùm prædita, extensione scilicet et massâ, distingvatur. Qvanqvam non negem singulares qvasdam operationes cæteris, saltem apparere, mirabiliores; qvas plus valere si non ad probandum, certè ad persuadendum, non abnuerim. Qvod hanc vero attinet ((mentis actionem)) qva spatia infinita metimur, ((ea nihil extraordinarium continet, cùm fictione qvadam nitatur, et)) supposita qvadam linea terminata qvidem, infinita tamen, nullo negotio procedat, ((unde non)) plus habet difficultatis, qvàm si finitum longitudine spatium metiremur.

Zeit wie die Randbemerkung, die in Anm. 104 am Ende abgedruckt ist): ((verum hîc notandum est, si qvis idem de spatio absolutè interminato ((qvod inter curvam et asymptoton interjacet)) demonstratum esse putat, eum mea sententia falli. Alterius longè naturae est qvantitas infinita et qvantitas interminata, qvemadmodum diversi omnino generis sunt indivisibile et infinitè parvum. Qvæ tum à Geometris, tum à metaphysicis sæpe confusa paralogismorum et errorum causæ fuere. Interminatum voco, cùius nullum est punctum ultimum: infinitum autem voco, qvod maius est qvalibet intelligibili à nobis sive numeris explicabili qvantitate, tametsi aliud eo maius sit, qvod cum [ipsi] ((— (?))) applicatum longius procurrat, ipsum cui applicatum est utiqve terminatum erit)). Die Fortsetzung ist wegen des Seitenendes weiter oben an den Rand geschrieben: ((An autem hùiusmodi qvantitates ferat natura rerum, Metaphysici est disqvirere; Geometræ sufficit, qvid ex ipsis suppositis seqvatur demonstrare. Multa hîc dicere possem, exemplis elegantibus atqve exqvisitis illustrata, si locus iste, aut otium meum pateretur.)) Vgl. Anm. 122.

[118]) In A fehlt dieser Satz. Statt dessen stehen in A folgende in B fehlenden Sätze: Qvoniam verò observavi, demonstrationes plerumqve in hoc negotio afferri non satis cogentes; contenti enim solemus esse ratiocinatione, qvæ ab omnibus partibus finitis, ad infinitum ipsum prosilit, cùm tamen veritates usqve adeò paradoxæ paulo exqvisitius comprobari mereantur; ideo circumspexi qvanam eas ratione satis [munire possem contra Scepticismum: et frustra tentavi rationibus apagogicis uti] ((munirem)). Qvod non arbitror fieri posse rectius, qvàm motu continuo assumto, is enim interruptionem atqve cessationem ad ultimum usqve momentum patitur nullam. Ultimam autem motus momentum nihil mutat, adjicit adimítve.

[119]) A im Anschluß an Anm. 118: Pater Pardies è S. J. scriptis elegantibus apud eruditos notus et vita usw. wie in B.

[120]) A: his.

[121]) In A schließt der Absatz kürzer: nec abnuerim subesse aliqvid solidi, cum omnes mentis actiones idem evincant et tanto magis, qvanto sunt admirabiliores. ((Sed qvi circa mentem aliqvid demonstrare in se suscipiet, modò à paralogismis caveat, sentiet non esse cùiusvis in Metaphysicis — (?) Geometriam.))

Magis[122]) mirarer, si qvis ipsum spatium absolutè interminatum inter curvam atqve perfectam asymptoton interjectum; ad finitum spatium reducere posset. Sed tale nihil mihi innotuit, credo nec aliis. ((adde tamen prop. 14. coroll.)) Qvoniam verò paradoxa qvibusdam hæc locutio videbitur, de Lineis qvæ infinitæ, non tamen interminatæ sint: Ideò admonendum est, qvemadmodum plurimum interest inter indivisibile et infinitè parvum; ita longam esse differentiam inter infinitum et interminatum. Fallax est indivisibilium Geometria, nisi de infinitè parvis explicetur; neqve enim puncta verè indivisibilia tutò adhibentur, sed lineis utendum est, infinitè qvidem parvis, lineis tamen, ac proinde divisibilibus. Eodem planè modo qvantitas interminata differt ab infinita. ((Nam lineæ interminatæ magnitudo nullo modo Geometricis considerationibus subdita est, non magis qvàm puncti. Qvemadmodum enim puncta, licet numero infinita, frustra adduntur aut subtrahuntur lineæ terminatæ, ita linea terminata, qvotcunqve licet vicibus repetita interminatam facere aut exhaurire non potest. Qvod secus est in linea terminata qvidem, infinita tamen, qvæ aliqva linearum finitarum multitudine constituta intelligitur, tametsi multitudo hæc omnem numerum excedat. Et qvemadmodum linea infinita terminata componitur ex finitis; ita finita linea componitur ex infinitè parvis, sed divisibilibus tamen. Hinc dici non potest Lineam terminatam esse proportione mediam inter punctum seu lineam minimam, et interminatam seu lineam maximam. At dici potest lineam finitam esse mediam)) proportione, non qvodammodo, sed verè exactéqve inter ((qvandam)) infinitè parvam et ((qvandam)) infinitam; et verum est rectangulum sub linea infinita et infinitè parva cuidam finito qvadrato æqvale esse posse; idqve in Hyperbola Conica reapse contingit. Nam si curva ₄D δ λ esset Hyperbolica, cùius centrum sit μ et abscissa aliqva infinitè parva sit μ (μ), foret ordinata utiqve infinitè longa (μ) λ, major scilicet qvalibet recta designabili, et rectangulum infinitum μ (μ) λ sub infinita et infinitè parva comprehensum, ex natura Hyperbolæ qvadrato cuidam constanti finito æqvale esset. Interminatum itaqve voco in qvo nullum punctum ultimum sumi potest, saltem ab una parte. Infinitum verò, qvantitatem sive terminatam, sive interminatam, modò qvalibet à nobis assignabili, numerisve designabili, majorem ((intelligamus)). An autem huiusmodi qvantitates ferat natura rerum, Metaphysici est disqvirere; Geometræ sufficit, qvid ex ipsis positis seqvatur, demonstrare.][113])

Constitutis Propositionibus generalibus ad Specimina Methodi descendere tempus est: qvalia in Cycloide, aliisqve curvis, sed potissimum in Circulo habemus, cuius causa totam hanc tractationem suscepimus. Qvoniam autem nostra Circuli Qvadratura reqvirit Qvadraturas Paraboloidum; itaqve ubi

[122]) Der folgende Absatz von B ist eine weitere Ausführung der in Anm. 117 abgedruckten Randbemerkung von A.

paucis Cycloidem ac figuram Angulorum attigerimus (qvoniam ex his nihil in seqventia redundat) ad Paraboloides et Hyperboloides qvadrandas accedemus, et ad Qvadraturam Circuli gradum struemus[124]).

Propositio XX.[125])

„Si V + X ad V + Z rationem habeat inæqvalitatis finitam, sintqve X „et Z finitæ, erit et V finita; qvod si alterutra ipsarum X vel Z sit infinita, „etiam V infinita erit.

Prior pars ita probatur: Ponatur[126]) esse falsa, et X atqve Z existentibus finitis sit V infinita, erit et V + X infinita, itemqve V + Z infinita; qvare et differentia earum erit infinita, qvia si infinitum minus à majore ad ipsum rationem inæqvalitatis finitam, ut duplam, sesqvialteram, aliámve habente auferas; restat infinitum. Differentia ergo inter V + X et V + Z est infinita; qvod et absurdum, eadem est enim cum differentia inter X et Z, sublata scilicet qvantitate communi V, differentia autem inter X et Z, qvantitates ex hypothesi finitas, est etiam finita. Absurdum est ergo ipsis X et Z positis finitis V esse infinitam.

Posterior pars ita constat. Si V esset finita, et alterutra duarum reliqvarum, verbi gratia Z, infinita, X verò finita; foret V + X finita, et V + Z infinita, finitum ergo ad infinitum rationem haberet inæqvalitatis finitam, (qvam, ex hypothesi, habent V + X et V + Z). Qvod est absurdum.

Propositio XXI.[127])

„Rectangulum (($_0$C $_0$GA $_0$B)) sub abscissa ((A_0B)) infinitè parva et „((infinita)) ordinata (($_0$B $_0$C)) ad Hyperboloeidem, (($_0$C $_1$C $_2$C)) est qvantitas „infinita cum major est exponens dignitatum ab abscissis, qvàm exponens „dignitatum ((proportionalium)) ab ordinatis; sin ille exponens hoc minor „sit, rectangulum erit qvantitas infinitè parva; deniqve si æqvales sint „exponentes, rectangulum erit qvantitas ordinaria finita.

(1) Si æqvales sint exponentes, seu si ordinatæ BC, vel earum potentiæ sunt abscissis ((AB)) vel earum potentiis similibus reciprocè proportionales, constat curvam $_0$C $_1$C $_2$C esse Hyperbolam Conicam, ((et)) rectan-

[124]) Dieser Absatz fehlt in A.

[125]) A: prop. XVII. (Blatt 158, Vorderseite.)

[126]) A: ponatur V esse infinita, erit qvoqve V + X infinita, itemqve V + Z infinita; et ex hypothesi unius ad alterum ratio est ((inæqvalitatis)) finita, jam si infinitum minus à majore ad ipsum rationem finitam, verbi gratia duplam, triplam, vel sesqvialteram, aliamve qvamcunqve habente, subtrahatur, restabit infinitum; itaqve si V + Z minor ((si placet)) at V + X majore subtrahatur, restare deberet X — Z infinita, at ea ex hypothesi finita est. Ergo V infinita non est. Posterior pars ita constabit: Si V esset finita, et Z verbi gratia infinita, X finita, foret V + X finita, at V + Z infinita, itaqve finitum ad infinitum, rationem habebit finitam. (supposuimus enim V + X ad V + Z rationem habere finitam) qvod est absurdum. Ergo posteriore casu V necessario infinita erit.

[127]) In A fehlt dieser Satz.

gulum $_0$C $_0$GA $_0$B æqvari qvadrato A $_2$BR $_2$G, ex natura Hyperbolæ, nec refert qvanta sit longitudo aut parvitas rectarum A $_0$B vel $_0$B $_0$C; qvadratum autem A $_2$BR $_2$G finitum est, ergo et rectangulum $_0$C $_0$GA $_0$B, sub infinitè parva A $_0$B et infinitè longa $_0$B $_0$C comprehensum, est finitum.

(2) Si exponentes sint inæqvales, suffecerit unius curvæ Hyperboloidis exemplo uti. Sit ergo $_0$C $_1$C $_2$C Antiparabola, in qva scilicet qvadrata ordinatarum sint reciprocè ut abscissæ vel ordinatæ conjugatæ; aut contra ordinatæ sint reciprocè ut qvadrata abscissarum vel ordinatarum conjugatarum. Ac primum ponamus ad Asymptoton AB demissas ordinatas BC esse ut qvadrata ipsarum AB reciprocè, sive esse $_0$B $_0$C ad $_1$B $_1$C ut qvad. A $_1$B ad qvad A $_0$B. Porro rectangulum A $_0$B $_0$C $_0$G est ad rectangulum A $_1$B $_1$C $_1$G in ratione composita ex rationibus A $_0$B ad A $_1$B, et $_0$B $_0$C ad $_1$B $_1$C ((vel qvad. A $_1$B ad qvad. A $_0$B)). ratio autem composita ex duabus A $_0$B ad A $_1$B, et qvad. A $_1$B ad qvad. A $_0$B est eadem qvæ rectæ A $_1$B ad rectam A $_0$B. Ergo rectang. A $_0$B $_0$C $_0$G ((est)) ad rectangulum finitum A $_1$B $_1$G $_1$C ut recta A $_1$B finita, ad rectam A $_0$B infinitè parvam. Qvicqvid autem ad qvantitatem finitam rationem habet qvam finitum ad infinitè parvum, seu qvam infinitum ad finitum, id ipsum est infinitum. Rectangulum ergo A $_0$B $_0$C $_0$G est infinitum, cum ordinatæ sunt reciprocè, ut qvadrata abscissarum; et generaliter cum exponens dignitatum ab abscissis major qvàm ab ordinatis; ((qvod)) eadem servata ratiocinandi methodo qvivis experiri potest, ego verbis in re clara parco.

(3) Contrà, si eadem curva Antiparabolica inverso modo sumta intelligatur, sintqve qvadrata ordinatarum ((reciprocè)) ut abscissæ (scilicet pro ordinatis prioribus assumtis earum conjugatis, axe qvoqve conjugato, in prioris locum posito et vice versa) sive qvad. $_0$B $_0$C ad qvad. $_1$B $_1$C ut A $_1$B ad A $_0$B, eodem planè modo ratiocinabimur, nempe rectangulum A $_0$B $_0$C $_0$G est ad rectangulum A $_1$B $_1$C $_1$G in ratione composita ex ratione A $_0$B ad A $_1$B ((vel qvad. $_1$B $_1$C ad qvad. $_0$B $_0$C)) et ((ex)) ratione $_0$B $_0$C ad $_1$B $_1$C; ratio autem composita ex rationibus qvad. $_1$B $_1$C ad qvad. $_0$B $_0$C, et rectæ $_0$B $_0$C ad rectam $_1$B $_1$C est ratio rectæ (finitæ) $_1$B $_1$C ad (((infinitam))) $_0$B $_0$C, est ergo rectangulum A $_0$B $_0$C $_0$G ad rectangulum finitum A $_1$B $_1$C $_1$G, ut qvantitas finita ad infinitam. qvicqvid autem est ad qvantitatem finitam, ut qvantitas finita ad infinitam, id est infinitè parvum. Rectangulum ergo A $_0$B $_0$C $_0$G est infinitè parvum, cùm ordinatarum qvadrata sunt reciprocè ut abscissæ, et generaliter cum exponens dignitatum ab abscissis minor qvàm ab ordinatis; cum eadem in casibus aliis ratiocinandi methodus servetur.

((Rectang. sub prima abscissa et ordinata sit xy.
sit $y^m = x^{-n}$. seu $y = x^{-n:m}$. $yx = x^{m-n:m}$. jam si $x = 0$, et m major n, fit m-n:m qvantitas affirmativa. sin n major m, est qvantitas negativa; Potentia autem ipsius 0 affirmativa (cum m major n) dat infinitè parvum; sed potentia ipsius 0 negativa (cum n major m) dat infinitum. Ergo cum

exponens ordinatarum major qvam abscissarum, rectangulum est infinitè parvum; cum verò abscissarum major qvam ordinatarum, est infinitum.))

Propositio XXII.[128])

„In qvalibet Hyperboloide ((0C 1C 2C))[129]) (præter omnium primam seu „præter ipsam Hyperbolam Conicam) spatium[130]) infinitè longum „((1C 1BA 0G 0C 1C vel 1C 1GA 3B etc 3C 1C)) ad unam asymptoton ((AG)) est „area infinitum, ad alteram ((AB)) finitum. Infinitum ad illam ((asymptoton)) „in qvam demissæ ordinatæ exponentem habent, exponente dignitatum pro- „portionalium ab abscissis minorem; ((ad[131]) alteram verò)) spatium „longitudine infinitum area finitum erit. (((adde coroll. 2. post prop. 26.)))

Spatium longitudine infinitum intelligo ((1C 1BA 0G 0C 1C))[132]), cum ipsa A 0B vel 0G 0C infinitè parva est, tunc enim ipsa 0B 0C infinitè longa intelligetur. Nam A 1B finita ad A 0B infinitè parvam habet rationem omni assignata majorem, seu qvam infinitum ad finitum, ergo et [potentia] ((dignitas)) illius ad [potentiam] ((dignitatem)) similem hujus. Jam[133]) et ex generali hyperboloidum natura dignitates qvædam ipsarum 1B 1C, 0B 0C, sunt dignitatibus ipsarum A 1B, A 0B, reciprocè proportionales; ergo dignitas qvædam ab 0B 0C ad dignitatem similem ab 1B 1C, erit etiam ut dignitas qvædam ab A 1B ad dignitatem similem ab A 0B, seu ut infinitum ad finitum; est autem dignitas à ((recta)) (finita) 1B 1C, ipsamet finita, ergo dignitas ab 0B 0C erit infinita; ergo et ipsamet 0B 0C erit infinita. Et qvoniam nihil refert in qvem axium conjugatorum ducantur ordinatæ; semper enim earum dignitates dignitatibus abscissarum reciprocè proportionales sunt; idèo semper abscissa sumta infinitè parva, ordinata erit infinita; ac proinde omnis Hyperboloides utrumqve axium habet asymptoton, sive non, aut non nisi infinito abhinc intervallo, curvæ occurrentem.

Posito ergo punctum 0B distantia infinitè parva abesse à puncto A, rectámqve ab 0B versus curvam ductam infinito abhinc intervallo occurrere curvæ in 0C, seu rectam 0C esse infinitam; ajo spatium qvinqve-lineum longitudine infinitum ((1C 1BA 0G 0C 1C)) (terminatum recta asymptoto seu infinita A 0G, curva itidem infinita 1C 0C, rectis duabus finitis A 1B, 1B 1C, et deniqve infinitè parva 0C 0G) esse areâ infinitum eo casu qvem enuntiat propositio; secùs, finitum.

Nam per prop. 18. 0C0B1B1C0C (id est spatium longitudine infinitum 0C 0P 1C 0C, plus rectang. finitum 0P 0B 1B 1C, sive V + X, spatio appellato V,

---

[128]) A: Propositio Decima [Septima] ((Octava)).

[129]) A: Hyperboloeide, præter . . .

[130]) A: spatium ((curvilineum)) infinitæ longitudinis.

[131]) A: sin majorem habeant, spatium finitum erit.

[132]) A: ((0C 0GA 1B 1C 0C)).

[133]) Von hier an weicht A im Ausdruck sehr stark von B ab. Es lohnt sich aber nicht, die zahlreichen Abweichungen einzeln aufzuführen.

rectangulo X) est ad ₀C ₀G ₁G ₁C (seu ad idem spatium longitudine infinitum ₀C ₀P ₁C ₀C, plus rectang. ₀G ₀C ₀P ₁G altitudinis ₀G ₀C infinitè parvæ, baseos infinitè longæ ₀G ₁G; sive ad V + Z, dicto rectangulo ₀G ₀C ₀P ₁G[134]) appellato Z) ut numerus ad numerum inæqvalem, exponens scilicet dignitatis ordinatæ[135]) ad exponentem dignitatis proportionalis abscissæ[136]), qvi non nisi in Hyperbola Conica, in propositione exclusa, æqvales sunt. Habent ergo V + X et V + Z rationem inæqvalitatis finitam; et X est qvantitas finita, ergo per prop. 20. si Z sit infinita, erit etiam V infinita, sin Z finita, erit et V finita. Qvòd si autem V et Z finita est vel infinita, etiam V + X, imò V + X + Z finita vel infinita erit, nam X cum semper finita sit, additione sui nec infinitum in finitum transmutat, nec finitum in infinitum. Idem erit etsi ad V + X + Z addatur rectangulum infinitè parvum ₁G ₀P ₀BA, ut compleatur qvinqve-lineum ₁C ₁BA ₀G ₀C ₁C; nam infinitè parvum hoc rectangulum est (qvia eius basis ₀B ₀P vel ₁B ₁C finita, altitudo A ₀B infinitè parva); additio autem infinitè parvi etiam nihil mutat. At qvantitatem V + X + Z auctam rectangulo ₁G ₀P ₀BA ipsum qvinqve-lineum dictum complere patet, qvia V est trilineum ₀C ₀P ₁C ₀C et X rectangulum ₀P ₀B ₁B ₁C, et Z rectangulum ₀G ₀C ₀P ₁G[134]). concludimus ergo, si Z sit qvantitas finita vel infinita, etiam qvinqve-lineum finitum vel infinitum fore. Addatur ipsi Z seu rectangulo ₀G ₀C ₀P ₁G[134]) retangulum infinitè parvum ₁G ₀P ₀AB, fiet rectangulum ₀C ₀GA ₀B; itaqve si hoc rectangulum (sub abscissa infinitè parva A ₀B, et ordinata infinita ₀B ₀C comprehensum) finitum vel infinitum sit, etiam Z ab ipso non nisi infinitè parva qvantitate (₁G ₀P ₀BA[137])) differens, finitum vel infinitum erit, adeoqve et qvinqve-lineum. Est autem rectangulum ₀C ₀GA ₀B qvantitas infinita, cùm major est exponens dignitatum ab abscissis; at finita[138]), cùm major est exponens dignitatum ab ordinatis, per prop. 21. et qvinqvilineum hoc ₀C ₀GA ₁B ₁C ₀C est spatium infinitè longum ad asymptoton AG. Ergo cum major est exponens dignitatum ab abscissis, spatium infinitè longum ad asymptoton Hyperboloidis ((constitutum)) est ((area vel magnitudine)) infinitum, secus finitum. Hinc cùm qvælibet Hyperboloides binas habeat asymptotos ((AG, AB)) et ordinatæ ad unam ((ut ₁B ₁C)) æqventur abscissis ((ut A ₁G)) ad alteram, ((similiterqve ordinatæ ₁G ₁C, abscissis A ₁B;)) hinc si ad unam asymptoton major sit exponens dignitatis abscissarum qvàm ordinatarum; ad alteram minor erit exponens dignitatis abscissarum qvàm ordinatarum, ac proinde si spatium sit ((area vel magnitudine)) infinitum ((consistens)) ad

---

[134]) B fälschlich: ₀G ₀C ₁P ₁G.
[135]) B fälschlich: abscissæ.
[136]) B fälschlich: ordinatæ.
[137]) B fälschlich: ₀G ₀C ₁P ₁G.
[138]) Irrtum! vielmehr infinitè parvum.

unam asymptoton ((AG, ut exempli causa)) spatium (($_1$C $_1$BA $_0$G etc $_0$C $_1$C;)) tunc spatium infinitè longum ad alteram asymptoton ((AB consistens $_1$C $_1$GA $_3$B etc $_3$C $_1$C area vel magnitudine)) finitum erit; vel contra. Q. E. D.

Scholium.[139])

Libenter hanc contemplationem persecutus sum, qvia specimen exhibet cautionis circa ratiocinia de infinito et methodum indivisibilium, ostendítqve non semper ex partium finitarum perpetuò abscissarum proprietate qvadam ad totius infiniti spatii proprietatem posse prosiliri. Ut hoc loco in hyperbola conica posset aliqvis ita ratiocinari, ((zona)) $_1$C $_1$B $_2$B $_2$C $_1$C æqvalis zonæ conjugatæ $_1$C $_1$G $_2$G $_2$C $_1$C, et ((zona)) $_0$C $_0$B $_1$B $_1$C $_0$C æqvalis zonæ conjugatæ $_0$C $_0$G $_1$G $_1$C $_0$C (ponendo eas semper finitas esse) qvemadmodum constat ex prop. 18. et ita semper qvodlibet spatium ((qvadrilineum)) horizontale transverso seu perpendiculari. Jam omnia ((qvadrilinea)) horizontalia in infinitum usqve ad A complent spatium infinitum $_2$C $_2$BAM etc $_1$C $_2$C, et omnia perpendicularia sive conjugata in infinitum, complent spatium infinitum $_2$C $_2$GM etc $_1$C $_2$C, ergo spatium infinitum hoc illi erit æqvale, pars toti. Et in aliis hyperboloidibus semper concluderetur absurdum simili argumento. Nam exempli causa in Hyperboloide post Conicam proxima seu Antiparabola, si ordinatæ BC, sint ut abscissarum AB qvadrata reciprocè, ((tunc)) erit per prop. 18. $_1$C $_1$B $_2$B $_2$C $_1$C dimidium ipsius $_1$C $_1$G $_2$G $_2$C $_1$C[140]), eodem modo $_0$C $_0$B $_1$B $_1$C $_0$C dimidium ipsius $_0$C $_0$G $_1$G $_1$C $_0$C; ponendo semper finita esse, et ita semper qvodlibet qvadrilineum conjugati respondentis dimidium erit. Ergo spatium infinitum $_2$C $_2$BAM etc $_1$C $_2$C completum ab omnibus ((prioribus qvadrilineis)) in infinitum sumtis, erit dimidium spatii $_2$C $_2$GM etc $_1$C $_2$C completi à conjugatis omnibus, totum partis. Eodem modo in aliis colligetur totum partis suæ trientem aut qvartam partam esse. Eleganti argumento qvàm lubrica sit ratiocinatio circa infinita, nisi demonstrationis filo regatur.

Propositio XXIII.

. . . . . .

Scholium.[141])

Qvæ de infinitis atqve infinitè parvis huc usqve diximus, obscura qvibusdam videbuntur, ut omnia nova; sed mediocri meditatione ab unoqvoqve facilè percipientur: ((qvi verò perceperit, fructum agnoscet)). Nec refert an tales qvantitates sint in rerum natura, sufficit enim fictione

---

[139]) Auch in A findet sich dieses Scholium, nur mit kleinen Abweichungen im Ausdruck, bei dem Satze, der zuerst als 17., dann als 18. numeriert ist.

[140]) In A u. B fehlt $_1$G.

[141]) Das Scholium fehlt in A.

introduci, ((cùm)) loqvendi cogitandíqve, ac proinde inveniendi pariter ac demonstrandi compendia præbeant, ne semper inscriptis vel circumscriptis uti, et ad absurdum ducere, et errorem assignabili qvovis minorem ostendere necesse sit. Qvod tamen ad modum eorum qvæ p r o p. 6. 7. 8. diximus facilè fieri posse constat. Imò si qvidem possibile est directas de his rebus exhiberi demonstrationes, ausim asserere, non posse ((eas dari)), nisi his qvantitatibus fictitiis, infinitè parvis, aut infinitis, admissis ((adde supra prop. 7. schol.)) Si qvis ergo imposterum qveretur de usu harum qvantitatum, is aut ignarum se ostendet, aut ingratum. Ignarum qvidem, si non intelligit, qvanta hic lux accendatur in tota methodo indivisibilium, et materia qvadraturarum; ingratum verò, si utilitatem qvam percipit, dissimulat. Neqve enim hîc ut in Cavaleriana ((Geometria)) ullius lapsus periculum est; nec securitatis causa cogimur, ut Cavalerius, ad ordinatas parallelas methodum restringere, et æqvalia semper duarum proximarum ordinatarum intervalla postulare, ipsíqve nobis ut ille fecit, progrediendi vias obstruere: sed liberrimo mentis discursu possumus non minùs audacter ac tuto curvas qvàm rectas tractare. Cujus specimen totus hic libellus erit, si qvis methodi fructum qværit; securitatis autem ((exemplum)) peculiare dabunt qvæ diximus s c h o l. a d p r o p. 22. ubi Cavalerii methodus crudè sumta infida est. Unde intelligi poterit, non aliter eam obtinere, qvam qvatenus in hanc resolvi potest. Possem differentiam multis illustribúsqve exemplis ostendere si locus pateretur. Sed malim id lectores suo potius experimento discere qvam meis verbis, sentient autem qvantus inveniendi campus pateat, ubi hoc unum rectè perceperint, figurem curvilineam omnem nihil aliud qvàm polygonum laterum numero infinitorum, magnitudine infinitè parvorum esse. Qvod, si Cavalerius, imò ipse Cartesius satis considerassent, majora dedissent aut sperassent.

P r o p o s i t i o XXXI.

. . . . . .

S c h o l i u m.

Hoc theorema totius tractationis nostræ palmarium est: eiusqve causa reliqva scripsimus. Series longitudine infinitas, magnitudine finitas, esse qvantitates veras, multis exemplis ostendi potest: imprimis verò manifestè exemplo progressionum Geometricarum de qvibus supra. Progressionibus autem geometricis et nostræ nituntur. At inqvies magnitudo qvæsita ((sic)) non potest exhiberi, qvoniam in nostra potestate non est progredi in infinitum. Fateor: neqve ((enim)) eam constructione qvadam geometrica exhibere promitto, sed expressione Arithmetica sive analytica. Seriei enim, ((licet infinitæ, natura)) intelligi potest, paucis licet terminis ((tantùm)) intellectis, donec progressionis ratio appareat. Qva semel inventa frustra progredimur, qvoties de mente potius illustranda, qvàm de operatione

qvadam mechanica perficienda agitur. Itaqve si qvis veram ((relationem)) analyticam ((generalem)) qværit qvæ inter arcum et tangentem intercedit, is qvidem in hâc propositione habet qvicqvid ab homine fieri potest, ut infra demonstrabo. Habet enim æqvationem ((simplicissimi generis)) qvæ incognitæ qvantitatis magnitudinem exprimit ((cùm hactenus apud geometras appropinqvationes tantùm, non verò æqvationes pro arcu circuli demonstratæ extent. Ut taceam ne appropinqvationes rationales cuilibet arcui aut portioni circulari communes à qvoqvam fuisse datas.)) Qvare ((nunc primum)) huius æqvationis ope arcus circulares et anguli instar linearum rectarum analytico calculo tractari possunt: et si qvando contemplationem ad praxin referre libebit, operationes trigonometricæ, ingenti geometricæ miraculo sine tabulis perfici poterunt, errore qvantumlibet parvo.

Propositio XLIX.

„Si sit qvantitas A æqvalis seriei b — c + d — e + f — g etc ita „decrescenti in infinitum, ut fiant termini [aliqvi] ((tandem)) data qvavis „qvantitate minores; erit[142])

„+ b major qvàm A, ita ut differentia sit minor qvàm . c
„+ b — c minor . . . . . d
„+ b — c + d major . . . . . e
„+ b — c + d — e minor . . . . . f

„Et generaliter portio seriei decrescentis alternis additionibus et sub- „tractionibus formatæ terminata per additionem erit summa seriei major, „terminata per subtractionem erit minor; error autem vel differentia semper „erit minor termino seriei, portionem proximè seqvente.

Demonstratio:

c + e + g etc est majus qvàm d + f + h etc qvia cum series decrescat, erit d minor qvàm c, et f minor qvàm e etc. Porro ipsi b demendum est c + e + g etc, addendum d + f + h etc, ut fiat æqvale ipsi A, ex hypothesi, ergo plus ei adimendum qvàm addendem, ut fiat æqvale ipsi A. At si cui plus demendum qvàm addendum, ut alicui æqvale fiat, id eo majus est. Ergo b majus qvàm A. Eodem modo demonstrabitur esse b — c + d vel b — c + d — e + f aliæve portiones similes maj. qvàm A.

Contra d + f + h etc maj. qvàm e + g + l, qvia d maj. qvàm e, et f qvàm g etc, ipsi b — c addendum d + f + h etc, demendum e + g + l etc, ut fiat æqv. A, plus ergo ei addendum qvàm adimendum, ut fiat A. Ergo b — c min. qvàm A.

Eodem modo b — c + d — e vel b — c + d — e + f — g[143]) aliæve portiones similes min. qvàm A.

---

[142]) erit fehlt in B; ergänzt aus C (Math. Schr. V, S. 112).
[143]) f—g fehlt in B.

Hinc jam demonstro porro differentiam inter A et b esse minorem qvàm c, nam b maj. qvàm A et A maj. qvàm b — c; ergo differentia unius extremi b à medio A erit minor differentia extremorum b et b — c, seu ipsa c.

Eodem modo demonstratur differentiam inter A et b — c esse minorem qvàm d, nam b — c est minor qvàm A, et A min. qvàm b — c + d, ut ostendimus, ergo differentia extremi unius b — c à medio A erit minor differentia extremorum b — c et b — c + d, id est ipsa d. Eadémqve in cæteris demonstratio est.

Am Schluß der Arbeit sei es mir gestattet, Herrn Professor Dr. D. Mahnke meinen ergebensten Dank für seine stetige Anteilnahme und liebenswürdige Unterstützung durch gütigen Rat, durch freundliches Überlassen wichtigen Materials sowie durch Angabe von Quellen auszusprechen.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis 5

Einleitung.

§ 1. Die Vorwürfe gegen Leibniz wegen der mangelhaften Begründung seiner Infinitesimalrechnung 7
§ 2. Die Quellen zur Widerlegung dieser Vorwürfe 9

I. Kapitel.

Der erste, indirekte Beweis der „Qvadratura Arithmetica" vom Jahre 1676.

§ 3. Die infinitesimalgeometrische „Methode der Transformation" als Vorstufe der höheren Analysis 13
§ 4. Übersicht des wichtigsten Inhalts der Schrift über die arithmetische Qvadratur 15
§ 5. Satz 1—5. Plan einer allgemeinen Differenzenrechnung 16
§ 6. Satz 6 ff. Modernere Gestaltung der analytischen Geometrie Descartes' . . 20
§ 7. Umbildung der Indivisibelnmethode Cavalieris nach den Anregungen Robervals und Pascals 22
§ 8. Strenger Beweis der umgebildeten Indivisibelnmethode in der „indirekten Weise der Alten" 26
§ 9. Beweis des Satzes 6 über die beliebig genaue Annäherungsmöglichkeit eines krummlinigen durch einen treppenförmigen Flächenraum 28
§ 10. Indirekter Beweis der Sätze 7 und 8 über die allgemeine Transformationsmethode 31
§ 11. Die Scholien zu Satz 6—8. Vergleich des Leibnizschen mit dem Archimedischen Beweisverfahren 33
§ 12. Die Reichweite der bisherigen infinitesimalgeometrischen Methode und ihre Grenzen 38

II. Kapitel.

Die Anfänge der direkten Beweismethode auf infinitesimalem Gebiete.

§ 13. Satz 11 ff. Berechnung von Flächen von unendlicher Länge, aber endlichem Flächeninhalt. Direkter Beweis durch kontinuierliche Bewegung oder Grenzübergang.
§ 14. Das Scholium zu Satz 11 und andere Handschriften vom Febr. und April 1676. Unterscheidung des (potentiell) Unendlichen und des (aktuell) Unbegrenzten. Der Fiktionscharakter des Infinitesimalen.
§ 15. Satz 15—23. Die Qvadratur aller Parabeln und Hyperbeln, auch gewisser unendlich langer Flächenräume bei höheren Hyperbeln, und ihr Beweis durch direkten Grenzübergang.
§ 16. Die Scholien zu Satz 22 und 23. Die Unzuverlässigkeit der alten Methode der Indivisibeln und ihre Ersetzung durch die Fiktion des unendlich Kleinen.
§ 17. Satz 31, 49 und 50. Der strenge Konvergenzbeweis der Leibnizschen Reihe für die Kreisberechnung und aller alternierenden Reihen, deren Glieder eine monotone Nullfolge bilden, durch einen rein arithmetisch-analytischen Grenzübergang.

III. Kapitel.

Die Darstellungen und Begründungsversuche der höheren Analysis aus den Jahren 1677—1700.

§ 18. Die ersten handschriftlichen und gedruckten Einführungen in den neuen Kalkül aus den Jahren 1677—86. Der endliche Wert des Verhältnisses der Differentiale.
§ 19. Die Beziehung zu Newton, insbesondere zu seinen „Principia", 1687/9. Das „unvergleichbar Kleine".
§ 20. Die Rechtfertigung der verschiedenen Grade der Unvergleichbarkeit gegen Nieuwentijt, 1694/95.
§ 21. Die Auseinandersetzung mit Johann Bernoulli über den imaginären oder realen Charakter des Unendlichen in der Mathematik und Metaphysik, 1698/99.

IV. Kapitel.

Der endgültige Beweis der Differentialrechnung in den Jahren 1701/2.

§ 22. Der Angriff Gouyes und Leibnizens „Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung" aus der analytischen Geometrie der Geraden. Das Gesetz der Kontinuität und die ein- oder ausgeschlossenen Grenzen.
§ 23. Der „Beweis der Grundlagen der Differentialrechnung" vom Jahre 1702. Das Postulat allgemeiner Denk- und Rechenmethoden.
§ 24. Die Fiktion verschwindender Größen. Erklärung ihres wahren Sinnes durch einen Grenzprozeß.
§ 25. Definition des Differentialquotienten. Seine exakte Berechnung bei einigen einfachen und zusammengesetzten Funktionen.
§ 26. Definition des zweiten Differentialquotienten. Versuch des Existenzbeweises. Die Reichweite der Leibnizschen Grundlegungsarbeit.

Anhang.

De Qvadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolæ, cuius Corollarium est Trigonometria sine Tabulis. Autore G. G. L. L.

Index notabiliorum 41. — Propositio I. 41. — Scholium I. 42. — Propositio II. 42. — Propositio III. 43. — Scholium III. 44. — Propositio IV. 44. — Propositio V. 44. — Scholium V. 44. — Propositio VI. 45. — Definitio 46. — Demonstratio VI. 47. — Scholium VI. 51. — Propositio VII. 51. — Definitiones 51. — Demonstratio VII. 52. — Scholium VII. 53. — Definitiones 55. — Propositio VIII. 58. — Scholium VIII. 59. — Propositio XI. 59. — Scholium XI. 62. — Propositio XX. 65. — Propositio XXI. 65. — Propositio XXII. 67. — Scholium XXII. 69. — Scholium XXIII. 69. — Scholium XXXI. 70. — Propositio XLIX. 71.

Lebenslauf

Ich, Lucie Helene Scholtz, Tochter des Zollrats Max Scholtz und seiner Ehefrau Helene, geb. Burghardt, wurde am 26. Dezember 1903 in Liegnitz in Schlesien geboren. Ich besitze die preußische Staatsangehörigkeit, bin evangelischen Bekenntnisses und erhielt meine Erziehung im Hause meiner Eltern.

Von Ostern 1910 bis Ostern 1921 besuchte ich die höhere Töchterschule (Luisenschule) und im Anschlusse daran die Studienanstalt in Düsseldorf am Rhein, wo meine Eltern seit Ostern 1906 wohnten.

Von Ostern 1921 ab besuchte ich die realgymnasiale Studienanstalt in Trier an der Mosel, wohin mein Vater im Herbst 1920 versetzt worden war, und verließ diese Anstalt mit dem Zeugnisse der Reife im März 1923. In dieser Zeit wurde mein Vater als deutscher Beamter mit Familie von den Franzosen aus dem Rheinlande ausgewiesen.

Nach etwa halbjährigem Aufenthalte bei meinen Großeltern in Bunzlau in Schlesien nahmen meine Eltern in Berlin Wohnsitz, wohin mein Vater nach der Ausweisung zum Landesfinanzamte abgeordnet worden war. Hier begann ich auf der Zentrale der Deutschen Bank das Bankfach zu lernen, mußte aber meine Lehrzeit schon nach 7 Monaten wieder abbrechen, da mein Vater nach Trachenberg in Schlesien als Leiter des an der neuen polnischen Grenze errichteten Hauptzollamtes versetzt wurde. Ich war alsdann im Haushalte meiner Eltern tätig.

Im Dezember 1925 erfolgte abermals eine Versetzung meines Vaters nach Lübben in der Lausitz. Da inzwischen mein jüngerer Bruder sein Studium als Mediziner beendet hatte, konnte ich nunmehr, meiner Neigung folgend, endlich die Universität besuchen.

Ich studierte vom Sommersemester 1926 ab bis zum Wintersemester 1927/28 an der Universität Berlin Mathematik und Naturwissenschaften und vom Sommersemester 1928 an bis zum Sommersemester 1932 in Marburg (Lahn) Mathematik, Philosophie, Physik und Chemie.

Meine akademischen Lehrer waren

in Berlin die Herren Professoren: Bieberbach, Feigl, Hirn, Löwner, Nernst, Planck, Schlenk, Erhard Schmidt, Schur, Wehnelt;

in Marburg die Herren Professoren: Grüneisen, Heidegger, Hensel, Jaeck, Jaensch, Krafft, Luckey, Mahnke, Neumann, Otto, F. A. Schulze, Tomaschek, Wittig, Zühlke.

Ihnen allen bin ich zu aufrichtigem Danke verpflichtet.